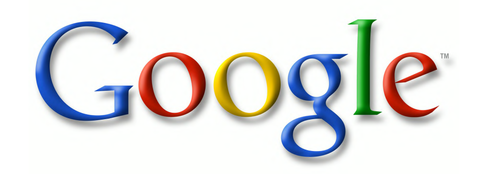
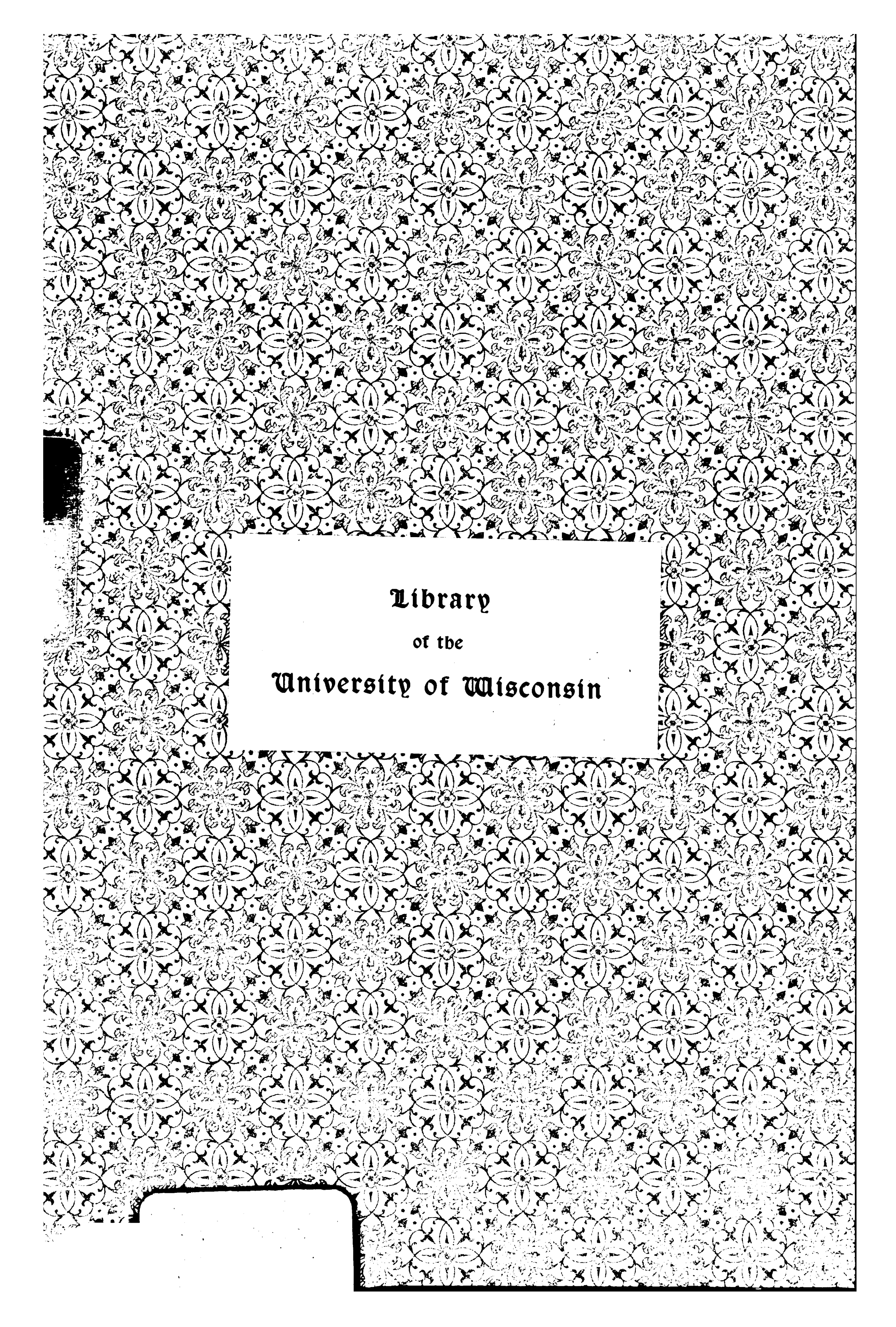
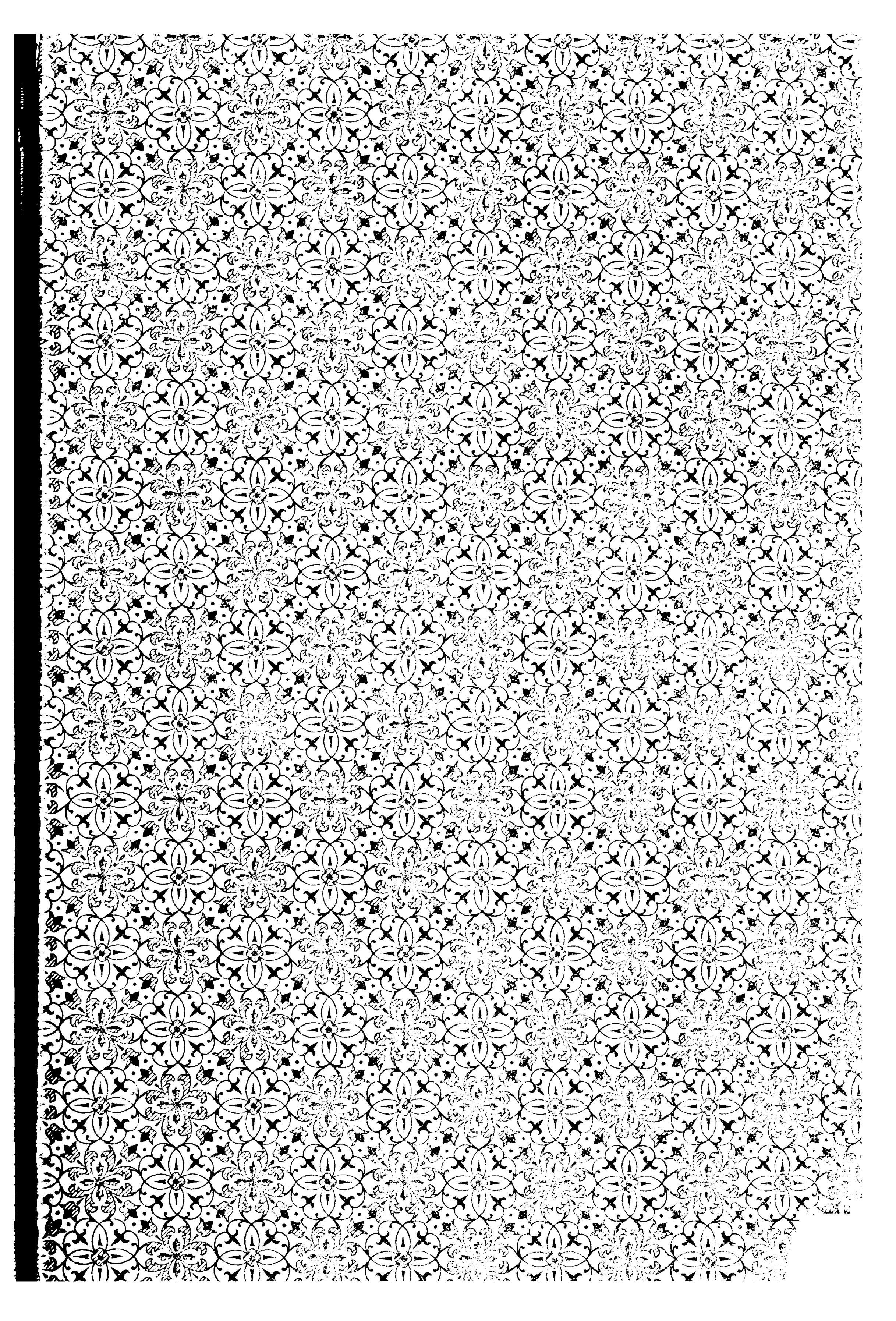






Vorträge

über

Mechanik

als Grundlage für das

Bau- und Maschinenwesen.

Von

Wilh. Keck,

Geh. Regierungsrath,

Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

Dritter Theil:

Allgemeine Mechanik.

Mit 206 Holzschnitten.



Hannover.

Helwing'sche Verlagsbuchhandlung.

1898.

Druck von Th. Schäfer, Hannover.

Vorwort.

Der vorliegende dritte und letzte Band meiner „Vorträge über Mechanik" mit der Bezeichnung „Allgemeine Mechanik" kehrt noch einmal zu den Anfangsgründen dieser Wissenschaft zurück, um die Grundbegriffe allgemeiner zu fassen, als es bei der ersten Einführung im ersten Theile räthlich erschien.

Das Buch behandelt zunächst das wichtigste aus der geometrischen Bewegungslehre der Punkte und Körper. Dann folgt die Mechanik des Massenpunktes, wobei zur Ergänzung des im ersten Bande Gegebenen namentlich die Wirkung veränderlicher Kräfte berücksichtigt wird mit Anwendung auf elastische und ähnliche Schwingungen, Planeten-Bewegung, Einwirkung des Luftwiderstandes u. dgl. Hieran schliesst sich die Mechanik beliebiger Massengruppen und starrer Körper.

Bei allen diesen Untersuchungen habe ich besonderes Gewicht auf die Durchrechnung von Zahlenbeispielen gelegt; auch wurde angestrebt, durch Vergleiche zwischen den verschiedenen Fällen zum Nachdenken über den inneren Zusammenhang der Formel-Ergebnisse anzuregen. Von Anwendungen auf praktische Fälle mögen genannt werden: die Einwirkung der schwingenden Glocke auf den Glockenstuhl (S. 204), die Schwingungen der Unruhe einer Taschenuhr (S. 232), die Schwingungen eines Eisenbahnwagens (S. 246), die Bewegung eines Eisenbahnzuges unter Einwirkung des Luftwiderstandes und der Bremsen (S. 240), die Bewegung des Geschosses in einem Kanonenrohr und ausserhalb desselben (S. 263).

Den Schluss des Buches bilden kurze Mittheilungen über die wesentlichsten Förderer der Mechanik; begreiflicherweise sind hierbei

die noch in vollem Schaffen stehenden Männer nicht mit aufgeführt worden.

Bei der Bearbeitung dieses Theiles wurden besonders folgende Werke benutzt: Lehrbuch der Analytischen Mechanik, von A. Ritter; Theorie der Bewegung und der Kräfte, von Wilh. Schell; Mechanik, von Woldemar Voigt; die Mechanik in ihrer Entwickelung, von Ernst Mach; Allgemeine Mechanik, von E. Budde; Lehrbücher der Statik und Dynamik fester Körper, von Jul. Petersen; Geschichte der Mechanik, von M. Rühlmann.

Alphabetische Verzeichnisse des Inhaltes und der in den Formeln benutzten Buchstaben sind auch diesem Bande beigefügt.

Hannover, im März 1898.

Keck.

Es wird gebeten, die am Schlusse des Buches angegebenen Berichtigungen zu beachten.

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Geometrische Bewegungslehre.

Zweite Abtheilung.

Mechanik des Massenpunktes.

Dritte Abtheilung.

Mechanik einer Gruppe von Massenpunkten.

A. Gleichgewicht einer Massengruppe.

B. Bewegung einer Massengruppe.

C. Bewegung starrer Körper.

Vierte Abtheilung.

Kurze Mittheilungen über die wesentlichsten Förderer der Mechanik.

Erste Abtheilung.

Geometrische Bewegungslehre.

Die geometrische Bewegungslehre verfolgt nicht das Ziel, die Bewegung eines Körpers aus der Wirkung gegebener Kräfte herzuleiten; vielmehr setzt sie die Bewegung als gegeben voraus und untersucht nur ihre Eigenschaften und kennzeichnenden Merkmale. Da nun in dieser Bewegungslehre die Kräfte nicht vorkommen, so braucht auch die Masse der Körper nicht berücksichtigt zu werden, vielmehr erscheinen letztere nur als geometrische Körper.

A. Bewegung eines geometrischen Punktes.

I. Geradlinige Bewegung eines Punktes.

Bewegt sich ein Punkt auf einer geraden Linie AB (Fig. 1), so ist die Bewegung völlig gegeben, wenn für jeden Zeitwerth (Zeitpunkt) t der Abstand s des beweglichen Punktes P von einem auf der Bahnlinie AB befindlichen Festpunkt A bekannt ist, etwa durch die Gleichung

Fig. 1.

1) $$s = f(t).$$

Ändert sich während des Zeittheilchens dt der Abstand s um $PQ = ds$, so ist ds die während der Zeit dt zurückgelegte Wegeslänge, und das Verhältnis

2) $$v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

heisst die Geschwindigkeit des beweglichen Punktes in dem Zeitpunkte t. Misst man die Wegeslänge nach Metern, die Zeit nach Sekunden, so bedeutet die Geschwindigkeit Meter in der Sekunde ($^m/_s$, s. 1. Theil, S. 7). Richtung und Sinn (Pfeilrichtung) der Geschwindigkeit stimmen mit derjenigen der Bewegung überein.

Die nach Gl. 2 berechnete Geschwindigkeit v ist im Allgemeinen mit der Zeit t veränderlich; erfährt sie während der Zeit dt einen Zuwachs um dv, so nennt man das Verhältnis

3) $$p = \frac{dv}{dt} = f''(t)$$

die Beschleunigung des Punktes im Zeitpunkte t, und zwar mit der Bedeutung Meter in der Quadratsekunde ($^m/_{s^2}$, s. 1. Theil, S. 13). Die Richtung der Beschleunigung p stimmt bei geradliniger Bewegung mit deren Richtung überein; bei positivem $\frac{dv}{dt}$ hat p mit v gleichen Sinn, bei negativem Werth entgegengesetzten Sinn.

Bekommt ein Punkt, der sich zu Anfang, d. h. für den Zeitpunkt $t = 0$, im Festpunkt A befindet und die anfängliche Geschwindigkeit c hat, eine Bewegung mit gleichbleibender Beschleunigung p, so wird nach Gl. 3

$$dv = p \cdot dt, \text{ also } v = pt + C,$$

worin, weil für $t = 0$ $v = c$ sein soll, $C = c$; aus Gl. 2 folgt dann $ds = v \cdot dt = (c + pt)\,dt$, also durch Integration

$$s = ct + \frac{pt^2}{2} + C_1,$$

oder, weil für $t = 0$ auch $s = 0$ sein soll, $C_1 = 0$, daher

4) $$s = ct + \frac{pt^2}{2}.$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $c = 0$, so wird die Wegeslänge

5) $$s = \frac{pt^2}{2}.$$

2. Krummlinige Bewegung.

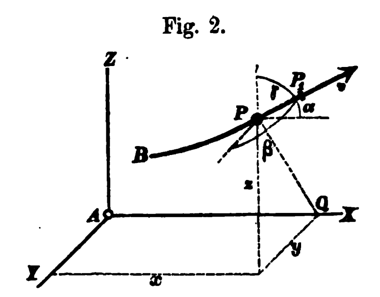
Bewegt sich ein Punkt in einer räumlichen Kurve, so kann man den augenblicklichen Ort P desselben mittels der Koordinaten x, y und z auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz beziehen. Sowohl

die Bahnlinie, wie auch die Bewegung in derselben sind völlig bestimmt durch die 3 Gleichungen

6) $$x = f(t); \quad y = F(t); \quad z = \varphi(t);$$

denn auf Grund dieser Gleichungen kann man für jeden Zeitpunkt t den Ort P des beweglichen Punktes berechnen. Entfernt man t aus den Gleichungen, so ergeben sich zwei Gleichungen zwischen x, y und z als die Gleichungen der Bahnlinie. Bewegt sich der Punkt während der Zeit dt von P nach P_1 (Fig. 2), also um die Wegeslänge $ds = PP_1$, so versteht man auch bei der krummlinigen Bewegung unter

Fig. 2.



7) $$v = \frac{ds}{dt}$$

die Geschwindigkeit des Punktes im Zeitpunkte t und bezeichnet auch Richtung und Sinn derselben als mit denen der Bewegung übereinstimmend. Die Richtung der Geschwindigkeit ist also tangential zur Bahnlinie, in so fern die unendlich kleine Sehne PP_1 mit der Tangente an P zusammenfällt. Nennt man α, β und γ die Neigungswinkel der im Punkte P gezogenen Bahnlinien-Tangente gegen die drei Achsen, so sind

$$ds \cdot \cos\alpha, \quad ds \cdot \cos\beta, \quad \text{und} \quad ds \cdot \cos\gamma$$

die Projektionen von ds auf die Achsen. In Fig. 2 ist aber die projicirende Gerade PQ rechtwinklig zur AX, der Punkt Q also die Projektion des Punktes P auf die AX und somit die Gleichung $x = f(t)$ das Gesetz, nach welchen sich die Projektion des Punktes P längs der AX bewegt. Die Geschwindigkeit dieser Projektions-Bewegung ist nach Gl. 6 und Gl. 2

$$v_x = f'(t) = \frac{dx}{dt}.$$

Weil aber dx auch die Projektion von ds auf die AX ist, so wird $dx = ds \cdot \cos\alpha$ und

8) $$v_x = \frac{ds}{dt} \cos\alpha = v \cdot \cos\alpha$$

(nach Gl. 7), d. h. **die Geschwindigkeit der Projektion des Punktes P ist gleich der Projektion der Geschwindigkeit v der wahren Bewegung des Punktes P.** Das gleiche gilt für die Projektionen auf AY und AZ.

Da nun $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, so wird

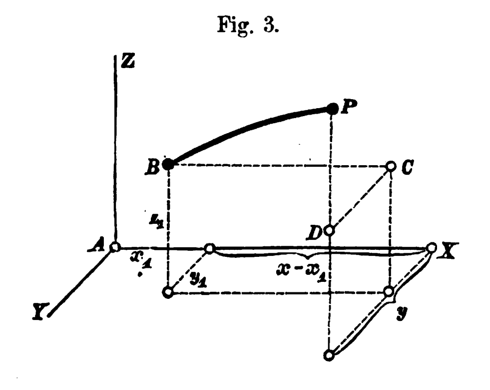
$$\frac{v_x^2}{v^2} + \frac{v_y^2}{v^2} + \frac{v_z^2}{v^2} = 1, \quad \text{oder}$$

9) $$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Es ist daher die Geschwindigkeit v des Punktes P nach Grösse und Richtung die Diagonale eines Parallelepipeds aus den Geschwindigkeiten der Projektions-Bewegungen längs dreier, winkelrecht zu einander stehenden Achsen, oder die geometrische Summe derselben (vergl. 1. Theil, S. 20).

Man kann dem Punkte P seine Bewegung längs der räumlichen Bahnlinie BP auch dadurch ertheilen, dass man ihn von dem Punkte B aus (dessen Koordinaten x_1, y_1, z_1) nach dem Gesetz $x = f(t)$ parallel der x-Achse um $BC = x - x_1$ bewegt (Fig. 3), gleichzeitig der Geraden BC eine Parallelverschiebung um CD, parallel der y-Richtung, ertheilt, so dass jeder Punkt der BC der Gleichung $y = F(t)$ folgt und auch noch zu derselben Zeit der

Fig. 3.



Ebene BCD eine Parallelverschiebung um DP im Sinne der z-Achse nach dem Gesetze $z = \varphi(t)$ giebt. Vermöge dieser drei gleichzeitigen Bewegungen um BC, CD, DP gelangt der Punkt von B nach P, und weil die einzelnen Bewegungen den Gleichungen 6 folgen, so gelangt der bewegliche Punkt auch in jedem Zwischenzeitpunkt an die richtige Stelle seiner Bahnlinie BP. Die drei Einzelbewegungen heissen die **Seiten-Bewegungen** der **wahren** oder **Mittel-Bewegung** BP. Die Projektionen der wahren

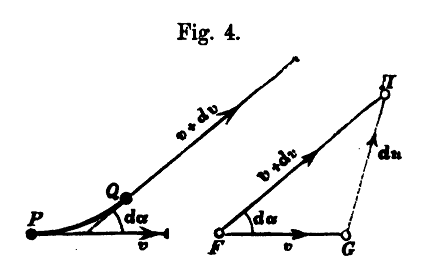
Geschwindigkeit v auf die drei Achsen sind zugleich die Geschwindigkeiten der drei Seitenbewegungen oder die Seitengeschwindigkeiten.

Die vorstehenden Entwickelungen gelten in ihren Hauptzügen auch für ein schiefwinkliges Achsenkreuz, nur bekommen dann die Gl. 8 und 9 eine etwas andere Form. Das Ergebnis dreier gleichzeitigen Geschwindigkeiten ist also stets eine wahre oder Mittelgeschwindigkeit v, welche sich nach Grösse, Richtung und Sinn als die Diagonale eines Parallelepipeds aus den Seitengeschwindigkeiten oder als die geometrische Summe der Seitengeschwindigkeiten ergiebt.

Bei der krummlinigen Bewegung ändert sich während eines Zeittheilchens dt im Allgemeinen sowohl die Grösse, wie auch die Richtung der Geschwindigkeit; diejenige Geschwindigkeit du nun, welche mit der im Zeitpunkte t vorhandenen Geschwindigkeit v zusammengesetzt werden muss, um mit ihr die im Zeitpunkte $t + dt$ geltende Geschwindigkeit $v + dv$ nach Grösse, Richtung und Sinn zu ergeben, heisst die Elementarbeschleunigung und liefert, durch dt getheilt, die **Beschleunigung** p der krummlinigen Bewegung im Zeitpunkte t nach Grösse Richtung und Sinn.

Ist (Fig. 4) PQ ein Bewegungs-Theilchen ds und bilden die an den Stellen P und Q der Bahnlinie vorhandenen Geschwindigkeiten v und $v + dv$ den Winkel $d\alpha$ mit einander, so trage man $v = FG$ und $v + dv = FH$ von einem Punkt F aus nach Grösse, Richtung und Sinn auf; dann ist $GH = du = p \cdot dt$ die Elementarbeschleunigung, und die Beschleunigung $p = du : dt$ stimmt nach Richtung und Sinn mit GH überein.

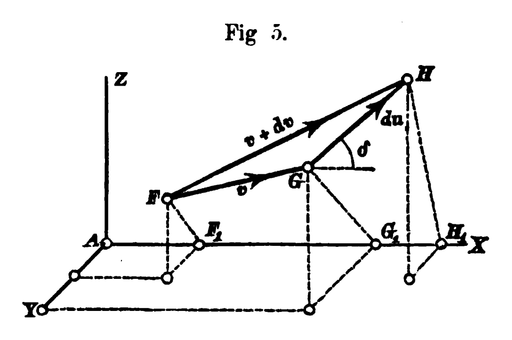
Fig. 4.



Bei krummliniger Bewegung weicht hiernach die Richtung der Beschleunigung p von der Richtung der Geschwindigkeit v ab. Da $v + dv$ die geometrische Summe von v und du ist, so kann die Elementarbeschleunigung als geometrische Differenz von $v + dv$ und v, oder, weil sie unendlich klein ist, als das geometrische Differential von v, die Beschleunigung als die geometrische Abgeleitete von v bezeichnet werden.

Projicirt man das beliebig im Raume liegende Geschwindigkeits-Dreieck FGH (Fig. 5) auf die Achse AX, so ist F_1G_1 die Projektion von v, also nach S. 5 die Seitengeschwindigkeit v_x in der x-Richtung im Zeitpunkte t, F_1H_1 die Projektion von $v + dv$, d. h. die Seitengeschwindigkeit $v_x + dv_x$ im Zeitpunkte $t + dt$. Somit ist $G_1H_1 = dv_x$ die Elementarbeschleunigung der Seitenbewegung in der x-Richtung. Zugleich ist aber G_1H_1 auch die Projektion der Elementarbeschleunigung GH der krummlinigen Bewegung, d. h. wenn $du = GH$ mit der x-Achse den Winkel δ bildet, $dv_x = du \cdot \cos\delta$. Sonach wird, wenn man mit $p_x = \frac{dv_x}{dt}$ die Beschleunigung der Seitenbewegung oder die Seitenbeschleunigung in der x-Richtung bezeichnet,

Fig. 5.



$$10)\quad \begin{cases} p_x = p \cdot \cos\delta; \text{ ebenso} \\ p_y = p \cdot \cos\varepsilon; \\ p_z = p \cdot \cos\zeta, \end{cases}$$

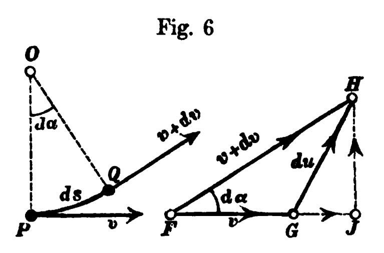
wenn ε und ζ die Neigungswinkel der Beschleunigung p gegen die AY und die AZ; d. h. die Beschleunigung der Projektions- oder Seitenbewegung ist gleich der Projektion der Beschleunigung der wahren Bewegung auf dieselbe Achse. Es wird

$$11)\quad p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}.$$

Also ist die Beschleunigung p des Punktes P nach Grösse und Richtung die Diagonale eines Parallelepipeds aus den Seitenbeschleunigungen längs dreier, rechtwinklig zu einander stehenden Achsen, oder die geometrische Summe derselben. Auch wenn die drei Achsen schief zu einander stehen, bleibt p die Diagonale des Parallelepipeds aus p_x, p_y und p_z; nur ändern sich dann die Gleichungen 10 und 11.

Das Geschwindigkeits-Dreieck FGH (Fig. 6) liegt in der durch zwei auf einander folgende Tangenten bestimmten Ebene, der sog. Krümmungsebene des Bahntheilchens PQ. In dieser Ebene liegt also auch du und die Beschleunigung $p = du : dt$. Die Elementar-Beschleunigung du lässt sich zerlegen in GJ und JH, von denen GJ in die Richtung der Tangente an die Bahnlinie, JH in die Richtung der in der Krümmungsebene liegenden Normalen zur Bahnlinie, der sog. Hauptnormalen fällt. Entsprechendes gilt von der wahren Beschleunigung p, insofern man dieselbe in die Tangential-Beschleunigung $p_t = GJ : dt$ und die Normal-Beschleunigung $p_n = JH : dt$ zerlegen kann. Nach der Figur 6 ist

Fig. 6



$$GJ = (v + dv) \cos d\alpha - v = dv$$

(wegen $\cos d\alpha = 1$), also

$$p_t = \frac{dv}{dt}. \tag{12}$$

$$JH = (v + dv) \sin d\alpha = v \cdot d\alpha$$

(weil $\sin d\alpha = d\alpha$ und $dv \cdot d\alpha$ unendlich klein zweiter Ordnung). Weil ferner $d\alpha = ds : \varrho$ ($\varrho = OP$ der erste Krümmungshalbmesser) und $ds = v \cdot dt$, so wird

$$JH = v \cdot \frac{v}{\varrho} dt = \frac{v^2}{\varrho} dt, \quad \text{also}$$

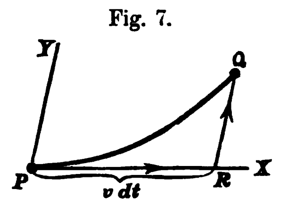
$$p_n = \frac{v^2}{\varrho}. \tag{13}$$

Die **Tangential-Beschleunigung** bringt die Grössen-Änderung der Geschwindigkeit zum Ausdruck, während die **Normal-Beschleunigung** die Richtungs-Änderung der Geschwindigkeit darstellt. Die Normal-Beschleunigung wird noch bestimmter **Centripetal-Beschleunigung** genannt, weil ihr Sinn nach dem ersten Krümmungs-Mittelpunkte der Bahnlinie gerichtet ist.

Die vorstehenden Lehren finden sich dem Wesen nach schon im 1. Theil, S. 3—30 eingehend behandelt und sind hier nur des Zusammenhanges wegen noch einmal kurz wiederholt.

Ablenkung (Deviation). Hätte der Punkt, der in Wirklichkeit eine ungleichförmige, krummlinige Bewegung mit der Gesammt-Beschleunigung p ausführt, vom Zeitpunkte t an keine Beschleunigung erfahren, so würde er mit der damaligen Geschwindigkeit v sich geradlinig und gleichförmig fortbewegt haben; er wäre in dem nächsten Zeittheilchen dt, statt von P nach Q, von P nach R gelangt (Fig. 7), worin $PR = v \cdot dt$ ist. Der Ortsunterschied RQ ist das Ergebnis der Beschleunigung p. Er heisst die Ablenkung oder Deviation (nämlich von der geradlinig-gleichförmigen Bewegung).

Fig. 7.



Zerlegt man die wahre Bewegung PQ in zwei Seitenbewegungen, von denen die eine in die Richtung PX der im Punkte P an die Bahnlinie gelegten Tangente, die andere in die Richtung PY der im Punkte P vorhandenen Beschleunigung fällt, so ist im Zeitpunkte t die Seitengeschwindigkeit in der x-Richtung $v_x = v$, in der y-Richtung $v_y = 0$, weil die wahre Geschwindigkeit v in der x-Richtung liegt; es ist die Seitenbeschleunigung in der x-Richtung Null, in der y-Richtung $p_y = p$, weil die wahre Beschleunigung in der y-Richtung liegt. Daher ist die Seitenbewegung in der x-Richtung eine gleichförmige mit der Geschwindigkeit v, die Seitenbewegung in der y-Richtung eine gleichförmig-beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung p, der Anfangsgeschwindigkeit Null und der Wegeslänge $p \cdot \frac{dt^2}{2}$ (nach Gl. 5, S. 2). Hieraus folgt, dass die

14) $$\textbf{Ablenkung } RQ = p\frac{dt^2}{2}$$

ist und nach Richtung und Sinn mit der Beschleunigung p übereinstimmt.

Beispiel: Ein Punkt bewege sich nach den auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz bezogenen Gleichungen:

15) $$x = r \sin \frac{c}{r} t; \quad y = r \cos \frac{c}{r} t; \quad z = ut,$$

worin r, c und u unveränderlich sein sollen. Entfernt man mit $t = \frac{z}{u}$ die Zeitgrösse aus den Gleichungen, so entsteht

16) $$x = r \sin \frac{c}{ru} z; \quad y = r \cos \frac{c}{ru} z$$

als die beideu Gleichungen der räumlichen Bahnlinie. Es bezeichnet dies eine cylindrische Schraubenlinie. Quadrirung und Addition der Gl. 16 liefern nämlich

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

d. h. die Projektion der Bahnlinie auf die xy-Ebene ist ein Kreis vom Halbmesser r. Die Seitengeschwindigkeiten sind

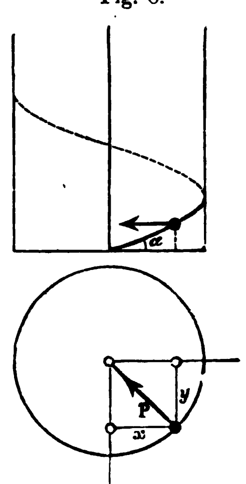
$$v_x = \frac{dx}{dt} = c \cos \frac{c}{r} t; \quad v_y = -c \sin \frac{c}{r} t; \quad v_z = u.$$

Betrachtet man nur die Seitenbewegungen in der xy-Ebene, so wird deren Geschwindigkeit

17) $$w = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = c,$$

d. h. der Kreis vom Halbmesser r wird von der Projektion des Punktes auf die xy-Ebene gleichförmig durchlaufen, und da der Punkt in der z-Richtung eine ebenfalls gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit u hat, so beschreibt er gleichmässig eine cylindrische Schraubenlinie (Fig. 8) von dem Halbmesser r und dem Ansteigungs-Verhältnisse

Fig. 8.



18) $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u}{c},$$

der Ganghöhe $\quad h = 2 r \pi \frac{u}{c}$

mit der Geschwindigkeit

19) $$v = \sqrt{c^2 + u^2} = c\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = c \sec \alpha.$$

Die Seitenbeschleunigungen sind:

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{c^2}{r} \sin \frac{c}{r} t = -\frac{c^2}{r} \frac{x}{r};$$

$$p_y = -\frac{c^2}{r} \cos \frac{c}{r} t = -\frac{c^2}{r} \frac{y}{r} \quad \text{und} \quad p_z = 0.$$

Die Projektionsbewegung in der xy-Ebene erfolgt mit einer Beschleunigung

20) $$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \frac{c^2}{r};$$

sie ist, weil diese Bewegung eine gleichförmige Kreisbewegung, eine reine Centripetalbeschleunigung (vergl. Gl. 13, S. 7), d. h. stets nach dem Mittelpunkt A des Kreises gerichtet. Weil aber $p_z = 0$, so ist auch die Gesammt-Beschleunigung der Schraubenlinien-Bewegung

$$p = \frac{c^2}{r},$$

deren Richtung und Sinn an jeder Stelle der Schraubenlinie nach der Achse derselben gekehrt und zu dieser rechtwinklig ist.

Bezeichnet aber ρ den ersten Krümmungshalbmesser der Schraubenlinie, so muss nach Gl. 13, S. 7 und Gl. 20 auch

$$p_n = p = \frac{v^2}{\rho} = \frac{c^2}{r}$$

sein, also wird $\rho = r\frac{v^2}{c^2}$, oder nach Gl. 19

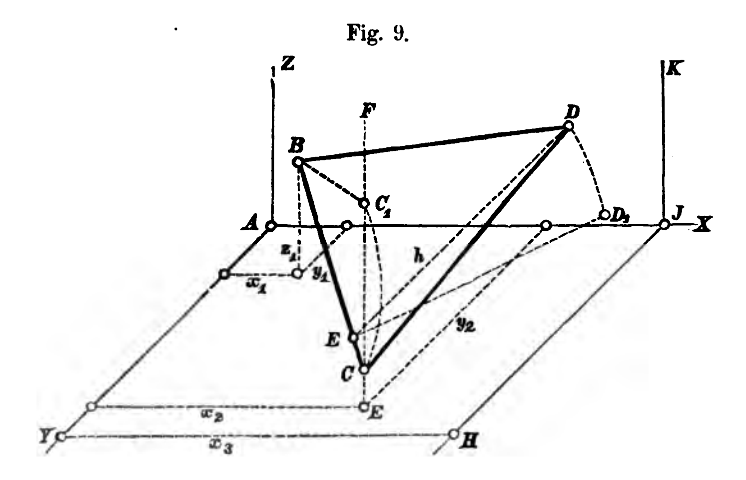
21) $$\rho = r \sec^2 \alpha .$$

Die entsprechenden Krümmungs-Mittelpunkte liegen auf den Richtungen von p, jedoch um $\rho - r = r \operatorname{tg}^2 \alpha$ jenseits der Achse. Ihr geometrischer Ort ist also eine Schraubenlinie vom Halbmesser $r \operatorname{tg}^2 \alpha$ und der Ganghöhe h.

B. Bewegung eines geometrischen Körpers.

Drei nicht in einer Geraden befindliche Punkte B, C und D eines Körpers unveränderlicher Form bestimmen die Lage desselben. Es seien x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 die rechtwinkligen Koordinaten der drei Punkte; sind nun zunächst x_1, y_1, z_1 gegeben, so ist

Fig. 9.



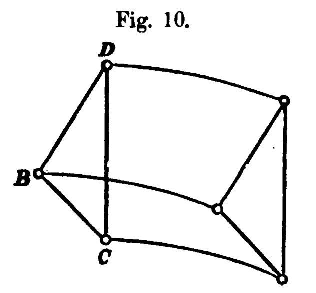
dadurch der Punkt B bestimmt (Fig. 9). Zur Festlegung von C sind dann aber nicht mehr drei, sondern nur zwei Koordinaten, etwa x_2 und y_2 erforderlich, da der an dem unveränderlichen Körper gegebene

Abstand von B und C die dritte Koordinate ersetzt. Auf der zur z-Achse parallelen, durch die Koordinaten x_2 und y_2 bestimmten Geraden EF liegen freilich im Allgemeinen zwei Punkte C und C_1, die von B den gegebenen Abstand BC haben; aus den besonderen Umständen des Falles muss dann hervorgehen, welcher von beiden in Frage kommt. Zur Festlegung des Punktes D ist nur noch eine der Koordinaten erforderlich, etwa x_3, weil die Abstände dieses Punktes von B und C die anderen beiden ersetzen. Nach der gegenseitigen Lage der Punkte B, C, D im Körper hat die von D auf BC gefällte Winkelrechte eine bestimmte Länge h und trifft die BC in einem bestimmten Punkte E, der nun im Raume schon eine bestimmte Lage hat. Beschreibt man um E als Mittelpunkt und mit h als Halbmesser einen Kreis, dessen Ebene rechtwinklig zu BC steht, so schneidet dieser Kreis die zu YAZ parallele, durch die Abscisse x_3 gegebene Ebene HJK in zwei Punkten, welche mögliche Lagen des Punktes D im Raume sind; wiederum muss aus den besonderen Umständen des Falles entschieden werden, welcher von beiden der richtige ist. Abgesehen von diesen Zweideutigkeiten, ist hiernach die Lage eines Körpers im Raume durch sechs Koordinaten bestimmt.

I. Verschiebung eines geometrischen Körpers.

Die Bewegung eines Körpers heisst eine Verschiebung (oder fortschreitende Bewegung), wenn alle Punkte desselben kongruente und parallel zu einander liegende Bahnen beschreiben, so dass alle Theile des Körpers ihrer Anfangslage parallel bleiben. In Figur 10 sind die Bahnlinien dreier Punkte B, C, D des sich verschiebenden Körpers dargestellt. In diesem Falle genügt offenbar schon die Kenntnis der Bewegung eines einzigen Punktes zur Bestimmung der Bewegung des ganzen Körpers, sodass die vorstehenden Lehren über die Bewegung eines Punktes auch auf die Verschiebung eines Körpers unmittelbare Anwendung finden.

Fig. 10.

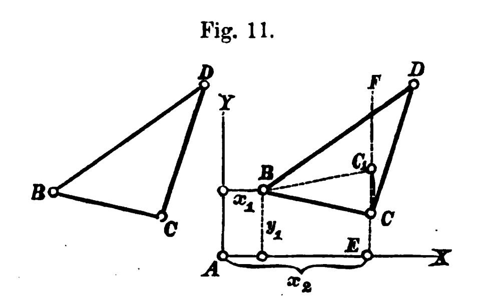


2. Ebene Bewegung eines Körpers; Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene.

Sind die Bahnlinien dreier Punkte eines Körpers, welche nicht in derselben Geraden liegen, einer gegebenen Ebene parallel, so bewegen sich sämmtliche Punkte des Körpers parallel der gegebenen Ebene, und jeder zu dieser letzteren parallel geführte Schnitt des Körpers bewegt sich in seiner Ebene. Eine derartige Bewegung des Körpers heisst eine ebene Bewegung, und zu ihrer Kenntnis genügt die Kenntnis der Bewegung einer solchen ebenen Schnittfigur in ihrer Ebene.

Die Lage einer Figur in einer Ebene ist schon durch die Lage zweier Punkte B und C bestimmt, sobald ein Umklappen der Figur in eine symmetrische Lage ausgeschlossen ist. Um z. B. das Dreieck BCD (Fig. 11) gegen ein ebenes Achsenkreuz XAY festzulegen, mögen für den Punkt B die beiden Koordinaten x_1 und y_1 gegeben sein. Für einen zweiten Punkt C sind dann nicht mehr zwei Koordinaten erforderlich, sondern nur eine derselben, etwa x_2, weil der gegebene Abstand BC der beiden Punkte die Ordinate y_2 ersetzt. Auf der zur y-Achse parallelen, durch die Abscisse x_2 bestimmten Geraden EF liegen freilich im Allgemeinen zwei Punkte C und C_1, die von B den gegebenen Abstand BC haben; aus den besonderen Umständen des Falles muss dann hervorgehen, welcher von beiden in Frage kommt. Hiervon abgesehen, ist also die Lage einer ebenen Figur in ihrer Ebene durch drei Koordinaten bestimmt.

Fig. 11.



Ist nun BC (Fig. 12) die Verbindungsgerade zweier Punkte, deren Lage die Lage einer ebenen Figur bestimmt, und ist B_1C_1 eine zweite Lage derselben Geraden in der Ebene der Figur, so lässt sich die Überführung der Geraden aus der Anfangslage BC in die andere Lage B_1C_1 durch Drehung um einen in der Ebene befindlichen Punkt O bewirken. Zieht man die Verbindungsgerade

BB_1 und zu ihr in ihrem Mittelpunkt E eine Winkelrechte EF, so haben alle Punkte der EF gleichen Abstand von B und B_1; durch Drehung um irgend einen Punkt der EF würde daher B in die neue Lage B_1 gelangen. Dasselbe gilt bezüglich der Punkte C und C_1 von jedem Punkte der Geraden GH, welche in der Mitte von CC_1 rechtwinklig zu CC_1 gezogen ist. Wird nun die Drehung um den Schnittpunkt O von EF und GH ausgeführt, so gelangt dadurch B nach B_1 und, weil $OBC \cong OB_1C_1$, gleichzeitig C nach C_1, d. h. die bewegliche Gerade BC in ihre zweite Lage B_1C_1.

Fig. 12.

Bei dieser Drehung um O beschreiben B und C Kreisbögen um O als Mittelpunkt (Fig. 13). Die Drehungshalbmesser BO und CO der Anfangslage sind rechtwinklig zu den kreisförmigen Bahnlinien BB_1 und CC_1.

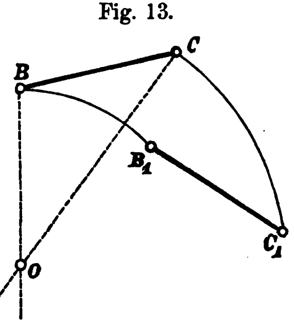


Fig. 13.

Sind ausser der beweglichen Geraden BC noch bestimmte Bahnlinien der Punkte B und C gegeben (Fig. 14) und wählt man auf der Bahnlinie des Punktes B einen sehr nahe bei B gelegenen Punkt B_1, so findet man den zugehörigen Punkt C_1 leicht durch Abtragen der Länge BC, so dass $B_1C_1 = BC$ ist. Dann ist B_1C_1 eine der Anfangslage BC der beweglichen Geraden benachbarte Lage. Konstruirt man nun in B eine Normale zu der Kurve BB_1, in C eine solche zu CC_1, so mögen sich beide in dem Punkt O schneiden. Bei einer Drehung der beweglichen Geraden um O werden die von B und C beschriebenen Kreise um so mehr mit den wahren Bahnlinien BB_1 und CC_1 zusammenfallen, je kleiner BB_1 gewählt

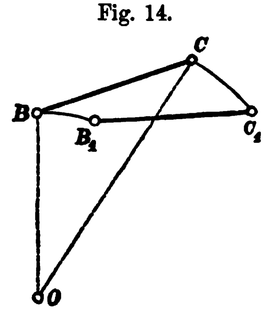
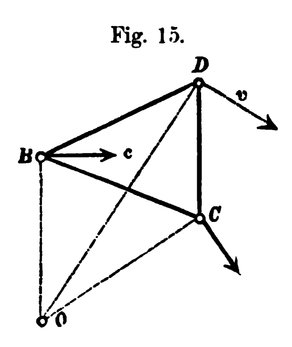


Fig. 14.

wurde. Denkt man sich BB_1 unendlich klein, BC und B_1C_1 als zwei unendlich wenig von einander abweichende Lagen der beweglichen Geraden, so kann man die unendlich kleine Bewegung der Geraden BC als mit der Drehung um O übereinstimmend ansehen. Dieser Punkt O heisst deshalb der **augenblickliche Drehpunkt** oder der **Pol** für die bewegliche Gerade in der Lage BC. Also: Die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene kann man in jedem Augenblick auffassen als Drehung um einen Punkt O in ihrer Ebene, den augenblicklichen Drehpunkt oder Pol. Dieser ist bestimmt durch die augenblicklichen Bewegungsrichtungen zweier Punkte der Figur.

Die Aufsuchung des Poles O für die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene bietet den Vortheil, dass aus den Bewegungs- oder Geschwindigkeits-Richtungen zweier Punkte und der Geschwindigkeitsgrösse eines Punktes die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit jedes anderen Punktes ermittelt werden kann. Geben z. B. in Fig. 15 die in den Punkten B und C angebrachten Pfeile die Bewegungsrichtungen dieser Punkte an, so sind die zugehörigen Drehungshalbmesser oder Polstrahlen BO und CO rechtwinklig zu den Bewegungsrichtungen. Zieht man von dem Pol O einen Polstrahl nach einem beliebigen Punkte D der Figur, so ist die Richtung der Geschwindigkeit dieses Punktes rechtwinklig zu OD. Da nun bei einer Drehung die Umfangsgeschwindigkeiten den Drehungshalbmessern, hier also den Polstrahlen verhältnisgleich sind, so gilt für die Geschwindigkeitsgrössen v und c der Punkte B und D die Gleichung

Fig. 15.

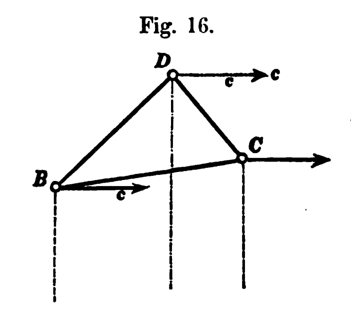


$$v = c\frac{OD}{OB};$$

bei gegebenem c ist also v bestimmt. Ebenso wie die Lage einer ebenen Figur in ihrer Ebene nach S. 12 durch drei Koordinaten gegeben war, so ist ihr augenblicklicher Geschwindigkeits-Zustand durch ebenfalls drei Stücke, nämlich zwei Richtungen und eine Grösse c, bestimmt.

Sind die Bewegungsrichtungen zweier Punkte einander parallel (Fig. 16) so liegt der Pol O in unendlicher Ferne; in Folge dessen haben alle Punkte der Figur Geschwindigkeiten, die nach Richtung, Grösse und Sinn übereinstimmen, d. h. die Bewegung ist in dem betreffenden Augenblick eine **Verschiebung** (oder eine rein fortschreitende Bewegung).

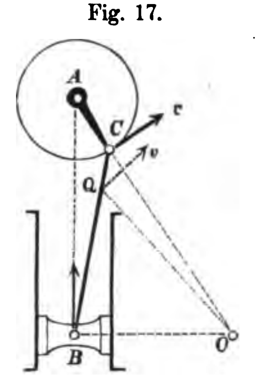
Fig. 16.



Beispiel 1: Bewegung einer Kurbelstange. Der Punkt C der Kurbelstange BC (Fig. 17) wird durch die Kurbel AC in einem Kreise mit dem Mittelpunkt A geführt, während der Punkt B vermöge der Geradführung gezwungen ist, sich längs einer Geraden AB zu bewegen. Die Winkelrechte zu der Bewegungsrichtung des Punktes C ist die Verlängerung der Kurbel AC, während der zu dem Punkte B gehörige Polstrahl BO rechtwinklig zu AB steht. Hierdurch ist der Pol O der Kurbelstange in der Lage BC bestimmt. Ist nun c die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens C, so ergiebt sich die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes Q der Stange zu

$$v = c \cdot \frac{OQ}{OC}.$$

Fig. 17.

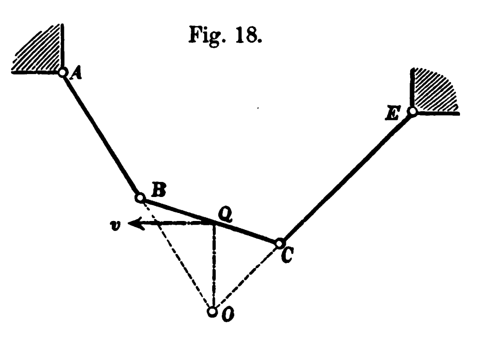


Diese Beziehung wird benutzt, wenn man behufs Ermittelung des erforderlichen Schwungrad-Gewichtes einer Dampfmaschine das Arbeitsvermögen der Kurbelstange berechnen will.



Beispiel 2: Pol einer Gelenkstange. Ist $ABCE$ eine an den Widerlager-Gelenken A und E aufgehängte Gelenkstangen-Verbindung, so kann der Punkt B sich nur rechtwinklig zu AB, der Punkt C sich nur rechtwinklig zu EC bewegen. Für die mittlere Stange BC sind daher ABO und ECO zwei Polstrahlen, die den Pol O bestimmen. Mit Hülfe des Poles lässt sich leicht derjenige Punkt der Stange BC angeben, der bei einer unendlich kleinen Verrückung der Stangenverbindung sich wagerecht

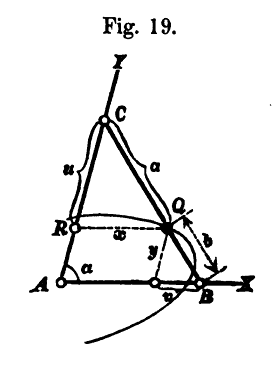
Fig. 18.



bewegen wird; es ist dies derjenige Punkt Q, dessen Polstrahl OQ lothrecht steht. Wie weiter unten gezeigt werden wird, hängt diese Eigenschaft des Punktes Q damit zusammen, dass die Figur $ABCE$ die Gleichgewichtsform ist für eine bei Q an der sonst unbelastet gedachten Stangenverbindung aufgehängte lothrechte Last (vgl. 1. Theil, S. 178 und Fig. 219).

Beispiel 3: Ellipsen-Zeichner. Ein Stab BC (Fig. 19) werde so geführt, dass ein Punkt B derselben sich nur auf einer Geraden AX, ein Punkt C derselben sich nur auf einer Geraden AY bewegen kann, wobei AX und AY einen Winkel α mit einander bilden. Wird nun an einer Stelle Q des beweglichen Stabes ein Zeichenstift eingesetzt, der von B und C um b bezw. a absteht, so beschreibt der Stift eine Ellipse mit dem Mittelpunkt A. Bezeichnet man nämlich die auf AX und AY bezogenen schiefwinkligen Koordinaten des Punktes Q mit x und y; setzt $AC - y = u$ und $AB - x = v$, so ist in dem Dreiecke CQR:

Fig. 19.



$$a^2 = u^2 + x^2 - 2\cos\alpha \cdot u \cdot x.$$

Ferner ist nach der Figur $\frac{u}{y} = \frac{a}{b}$, mithin

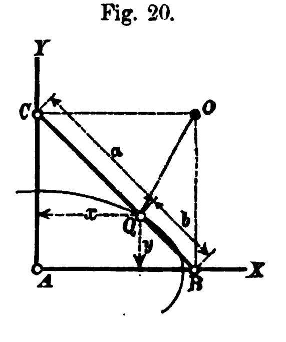
$$a^2 = \frac{a^2}{b^2}y^2 + x^2 - 2\cos\alpha \cdot \frac{a}{b}yx \text{ oder}$$

$$1) \qquad 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2\cos\alpha}{ab}xy.$$

Diese Gleichung bezeichnet eine Ellipse, weil

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} - \frac{\cos^2\alpha}{a^2b^2} > 0 \text{ ist.}$$

Fig. 20.



Wird im Besonderen $\alpha = 90^\circ$ (Fig. 20), so geht Gl. 1 über in

$$2) \qquad 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$

d. h. die Ellipse hat die Halbachsen a und b.

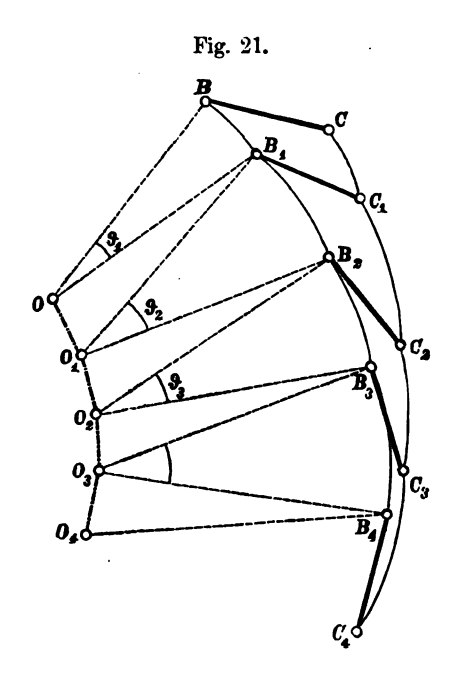
Der Polstrahl des Punktes B ist $\perp AX$, derjenige des Punktes $C \perp AY$; sonach ist der Pol O der vierte Eckpunkt eines Rechtecks $ABOC$ und hat, weil die Diagonalen eines Rechtecks gleich lang sind, vom Punkt A den Abstand $AO = BC = a + b$.

Da zum Punkte Q der Ellipse ein Polstrahl OQ gehört, der beschreibende Punkt Q sich also für einen Augenblick rechtwinklig zu OQ bewegen muss, so ist auch die Tangente an die Ellipse im Punkte Q rechtwinklig zu OQ, d. h. es ist der Polstrahl OQ eine Normale an die Ellipse im Punkte Q.

3. Endliche Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene. Rollbewegung der Polbahnen.

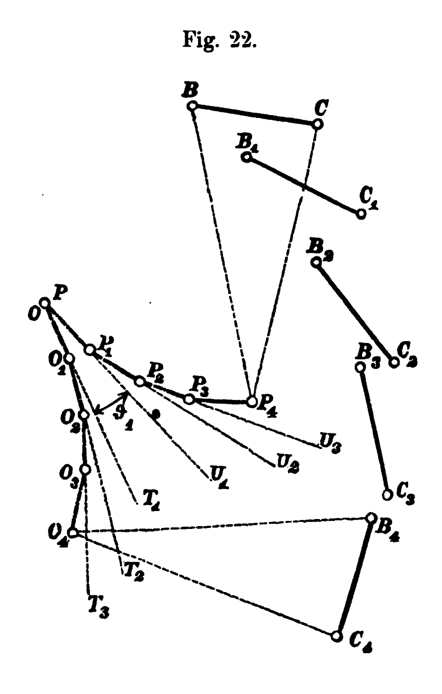
Sind BC, B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, B_4C_4 verschiedene Lagen der beweglichen Geraden BC (Fig. 21) in einer Ebene, u. zw. einstweilen in endlichen Abständen von einander, so lässt sich nach S. 13 die Überführung aus der Lage BC in die Lage B_1C_1 bewirken durch Drehung um einen Punkt O; der Winkelweg dieser Drehung $BOB_1 = COC_1$ sei ϑ_1; alle Punkte der beweglichen Figur beschreiben bei ihr Kreisbögen um O. Zu dem Übergange von B_1C_1 nach B_2C_2 gehöre der Drehpunkt O_1 mit dem Drehungswinkel ϑ_2, u. s. f. Die Verbindung der Drehpunkte durch Gerade liefert dann den Linienzug $OO_1O_2O_3O_4\ldots$ Nun stelle man sich vor, die bewegliche Figur BC sei auf einer grösseren Scheibe S aufgezeichnet, welche auf einer festen Tafel T liege. Die Punkte O gehören zur festen Tafel T; auf ihr sei der Linienzug $OO_1O_2O_3O_4$ gezeichnet. Während die Drehung um O erfolgt, möge ein Punkt P der beweglichen Scheibe S mit O zusammenfallen; diese beiden Punkte verschieben sich während der Drehung nicht gegen einander; man kann sich deshalb während der ersten Drehung durch P und O eine Nadel gesteckt denken; es wird hierdurch die Drehung nicht gehindert werden. Sobald aber BC in der zweiten Lage B_1C_1 angelangt ist, hört der Punkt O auf, Drehpunkt zu sein; es tritt dafür O_1 an die Stelle, und es wird während der zweiten Drehung ein Punkt P_1 (Fig. 22) der Scheibe S mit O_1 zusammenfallen. Da in

Fig. 21.



dem Augenblicke, wo BC in der Lage B_1C_1 sich befindet, P noch mit O zusammenfällt, so muss P_1, welches gleichzeitig mit O_1 sich deckt, um die Länge $PP_1 = OO_1$ von P entfernt sein. Ebenso wird während der Drehung um O_2 ein Punkt P_2 der beweglichen Scheibe mit O_2 in Berührung sein, so dass wiederum eine durch P_2 und O_2 gesteckte Nadel die Bewegung nicht hindern kann. Offenbar muss nun $P_1P_2 = O_1O_2$ sein. Die Lage von P_1 und P_2 findet man folgendermassen: Damit nach einer Drehung um den Winkel ϑ_1 der Punkt P_1 auf O_1 falle, muss der Winkel $O_1OP_1 = \vartheta_1$ sein; hiermit ist P_1 gefunden. Verlängert man OO_1 nach T_1, O_1O_2 nach T_2, u. s. f.; ebenso PP_1 nach U_1, so fällt nach der ersten Drehung PU_1 auf OT_1. Damit nun nach der Zurücklegung eines weiteren Drehungswinkels ϑ_2 der Punkt P_2 auf O_2, d. h. die Gerade $P_1P_2U_2$ auf $O_1O_2T_2$ falle, muss

Fig. 22.



$$U_1P_1U_2 + T_1O_1T_2 = \vartheta_2, \quad \text{also}$$
$$U_1P_1U_2 = \vartheta_2 - T_1O_1T_2$$

gemacht werden. Hiernach steht mit $P_1P_2 = O_1O_2$ der Punkt P_2 fest. In derselben Weise findet man P_3, P_4, P_5 . . . Wenn nun die Punkte P der beweglichen Scheibe der Reihe nach mit den Punkten O der festen Tafel T in der beschriebenen Weise zusammenfallen, so führt das Vieleck PP_1P_2 . . . offenbar eine Rollbewegung (ohne Gleiten) auf dem Vieleck OO_1O_2 . . . aus. Die Folge dieser Rollbewegung ist dann, dass die bewegliche Figur BC der Reihe nach die vorgeschriebenen Lagen B_1C_1, B_2C_2 u. s. f. einnimmt. Solange die bewegliche Figur BC ihre Anfangslage innehat, liegt

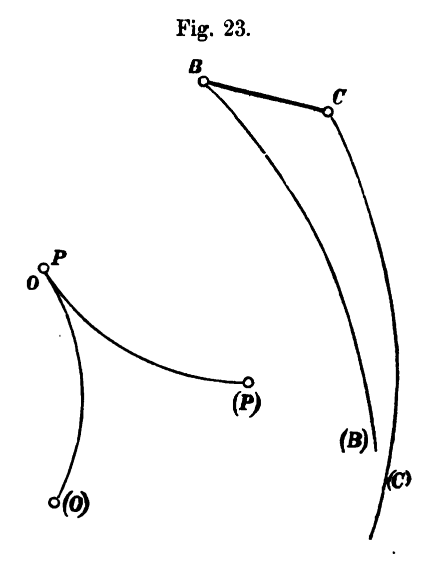
der Punkt, der demnächst mit O_4 zusammenfällt, in P_4; wenn aber BC die Lage B_4C_4 hat, so fällt P_4 mit O_4 zusammen; daher muss P_4 gegen BC ebenso liegen, wie O_4 gegen B_4C_4, d. h.

$$P_4BC \cong O_4B_4C_4, \quad \text{ebenso ist}$$

$$P_1BC \cong O_1B_1C_1 \quad \text{u. s. f.}$$

Im Vorstehenden waren nur einzelne bestimmte Lagen der beweglichen Figur als gegeben angenommen und die Vielecke $OO_1O_2\ldots$, sowie $PP_1P_2\ldots$ so gezeichnet, dass die bewegliche Figur BC der Reihe nach die verschiedenen Lagen B_1C_1, $B_2C_2\ldots$ durchschritt, wobei die Punkte B und C jedesmal Kreisbögen von den Mittelpunktswinkeln ϑ_1, $\vartheta_2\ldots$ beschrieben. Sind aber ausser der Anfangslage BC noch die Bahnlinien $B(B)$ bezw. $C(C)$ der Punkte B und C (Fig. 23) gegeben, wodurch die Bewegung der Figur BC völlig bestimmt ist, so entspricht jeder unendlich kleinen Verrückung der Figur ein augenblicklicher Drehpunkt O auf der festen Tafel, sowie im Sinne der vorstehenden Entwickelung ein Punkt P der beweglichen Scheibe S, auf welcher sich die Figur BC gezeichnet befindet. Statt des Vielecks $OO_1O_2\ldots$ erhält man dann eine Kurve $O(O)$ als geometrischen Ort der augenblicklichen Drehpunkte O der festen Tafel T, sowie statt des Vielecks $PP_1P_2\ldots$ eine Kurve $P(P)$ als geometrischen Ort derjenigen Punkte P der beweglichen Scheibe, welche nach und nach mit den Punkten O zusammenfallen. Die Kurven $O(O)$ und $P(P)$ heissen die **feste** bezw. die **bewegliche Polbahn**, und bei der gegebenen Bewegung erfolgt eine Rollbewegung der beweglichen Polbahn auf der festen Polbahn.

Fig. 23.



Hiernach ist jede Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene gleichwerthig mit dem Rollen einer mit

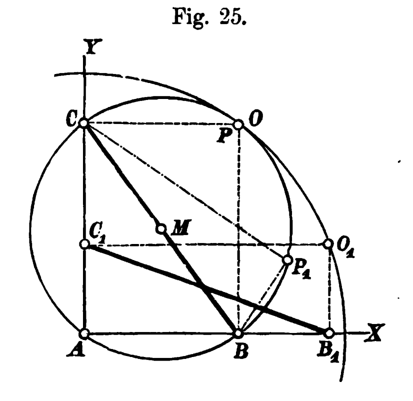
der Figur verbundenen Polbahn auf einer festen Polbahn. Dementsprechend ist die ebene Bewegung eines Körpers gleichwerthig mit dem Rollen einer mit dem Körper verbundenen Cylinderfläche P auf einer festen Cylinderfläche O; die Leitlinien dieser Cylinderflächen sind die vorstehend behandelten Polbahnen; die Erzeugenden stehen rechtwinklig zu den Ebenen, in denen die Körperpunkte sich bewegen.

Beispiel 1: Bei der Erzeugung der gemeinen Cykloide ist die Gerade AO (Fig. 24) die feste, der erzeugende Kreis OBC die bewegliche Polbahn. Der Berührungspunkt O beider ist der augenblickliche Drehpunkt, daher OB der Drehungshalbmesser, also auch die Normale für den Punkt B der Cykloide, BC also die Tangente; diese mittels der Analytischen Geometrie nachzuweisenden Eigenschaften folgen hier ohne jede Rechnung.

Fig. 24.

Beispiel 2: Für die in Beispiel 3, S. 16 behandelte Bewegung mit $\alpha = 90^0$ sollen die Polbahnen bestimmt werden. Schon auf S. 16 wurde gezeigt, dass der Pol O der beweglichen Geraden BC sich in einem Abstand $AO = BC = a + b$ von dem Schnittpunkt A der Leitlinien AX und AY befindet. Da dieser Abstand keine veränderliche Grösse enthält, so ist der Ort des Punktes O, d. h. die feste Polbahn, ein mit dem Halbmesser $R = AO = BC$ aus dem Mittelpunkt A beschriebener Kreis (Fig. 25). Für eine andere Lage $B_1 C_1$ der beweglichen Figur ist O_1 der Pol, wobei $B_1 O_1 C_1$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse $B_1 C_1$. Um nun den zu dem Punkte O_1 der festen Polbahn gehörigen Punkt P_1 der beweglichen Polbahn zu finden, haben wir über BC als Hypothenuse ein zu $B_1 O_1 C_1$ kongruentes Dreieck BP_1C zu zeichnen, dann ist P_1 der gesuchte Punkt. Der Ort der Rechtwinkelpunkte aller über der Hypothenuse BC gezeichneten rechtwinkligen Dreiecke ist aber bekanntlich ein Kreis mit dem Durchmesser $BC = R = 2r$; dieser muss mithin die bewegliche Polbahn P sein. Die gegebene Bewegung also, bei

Fig. 25.



welcher der Stab BC mit den Punkten B und C den Achsen AX bezw. AY folgt, kann auch bewirkt werden durch eine Rollbewegung des kleineren Kreises mit dem Durchmesser $BC = R = 2r$ auf dem inneren Umfange des grösseren Kreises vom Halbmesser $R = BC$. Wenn ein Kreis auf dem inneren Umfange eines grösseren Kreises rollt, so beschreibt jeder Punkt des Umfanges des ersteren eine Hypocykloide. Ist das Verhältnis der Halbmesser r und R der beiden Kreise aber $1:2$, so geht die Hypocykloide bekanntlich in eine Gerade, einen Durchmesser des grossen Kreises über, zu denen beispielsweise die Achsen AX und AY als Bahnen der Kreispunkte B und C gehören. — Jeder Punkt im Inneren des kleinen Kreises beschreibt allgemein eine verkürzte Hypocykloide, die aber für das Verhältnis $1:2$ der Halbmesser beider Kreise mit einer Ellipse übereinstimmt, wie es nach S. 16 der Fall sein muss. Der Mittelpunkt des beweglichen Kreises beschreibt im Besonderen einen Kreis; die übrigen Punkte bewegen sich in Ellipsen der verschiedensten Excentricitäten, die Punkte des Umfanges in geraden Linien, nämlich Durchmessern des festen Kreises. Aus diesem Grunde kann mittels der beiden Kreise eine Geradführung hergestellt werden, wie man sie wohl bei älteren Druckmaschinen noch findet. Zu dem Zwecke sind die beiden Kreise mit äusserer und innerer Verzahnung versehen; der Mittelpunkt M des kleineren Kreises wird mittels einer um die Achse A (rechtwinklig zur Bildebene) drehbaren Kurbel von der Länge $r = AM$ im Kreise herumgeführt und hierbei durch die Verzahnung zu einer Rollbewegung auf dem inneren Umfange des grossen Kreises gezwungen. Ein an der Stelle B des kleineren Rades angebrachter Zapfen beschreibt dann die Gerade ABX.

4. Drehung eines Körpers um einen festen Punkt; Bewegung einer sphärischen Figur auf ihrer Kugelfläche.

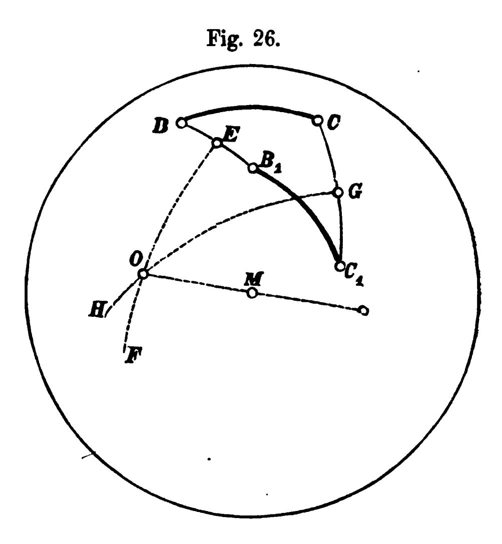
Während die Drehung eines Körpers um eine feste Achse durch Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung völlig bestimmt ist, also nur wenig Mannigfaltigkeit besitzt, ist die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt noch in demselben Grade mannigfaltig wie die allgemeine ebene Bewegung.

Schneidet man einen um einen festen Punkt M drehbaren Körper durch eine Kugelfläche vom Halbmesser r, so entsteht eine sphärische Schnittfigur, deren Punkte bei der Bewegung des Körpers stets in dem Abstand r von dem Punkt M, d. h. in ihrer Kugelfläche verbleiben werden. Durch die Bewegung der Schnittfigur ist die Drehung des Körpers völlig bestimmt, und umgekehrt. Für die Bewegung der Figur auf der Kugel und demgemäss für die Drehung des Körpers um den festen Punkt lassen sich nun ähnliche

Beziehungen finden, wie vorstehend für die ebene Bewegung entwickelt wurden.

Die Lage einer sphärischen Figur auf ihrer Kugel ist schon durch die Lage zweier Punkte bestimmt, u. zw. sind dazu nur drei Koordinaten erforderlich. Es genügt daher die Beobachtung der Bewegung einer Seite BC einer sphärischen Figur (Fig. 26).

Fig. 26.



Die Überführung der Seite aus der Anfangslage BC in eine andere Lage B_1C_1 lässt sich durch Drehung um einen Punkt O der Kugelfläche bewirken. Man findet O nach demselben Gedankengange wie bei der ebenen Bewegung auf S. 13; wo aber dort von geraden Linien die Rede war, treten jetzt Grösstkreise der Kugel an ihre Stelle. Zieht man durch B und B_1 einen Grösstkreis und zu ihm durch die Mitte E des Bogens BB_1 einen dazu rechtwinkligen Grösstkreis EF, so haben alle Punkte des letzteren gleichen Abstand von B und B_1; durch Drehung um irgend einen Punkt des Grösstkreises EF würde daher B in die neue Lage B_1 gelangen. Dasselbe gilt bezüglich der Punkte C und C_1 von jedem Punkte des Grösstkreises GH, welcher in der Mitte G von CC_1 rechtwinklig zu CC_1 gezogen ist. Wird nun der Schnittpunkt O von EF und GH zum Drehpunkte gewählt, so gelangt dadurch B nach B_1 und, weil $OBC \cong OB_1C_1$, gleichzeitig C nach C_1, d. h. die Seite BC in ihre zweite Lage B_1C_1. Eine Drehung der BC um den Punkt O ist auch gleichbedeutend mit der Drehung um den Kugelhalbmesser OM als Achse.

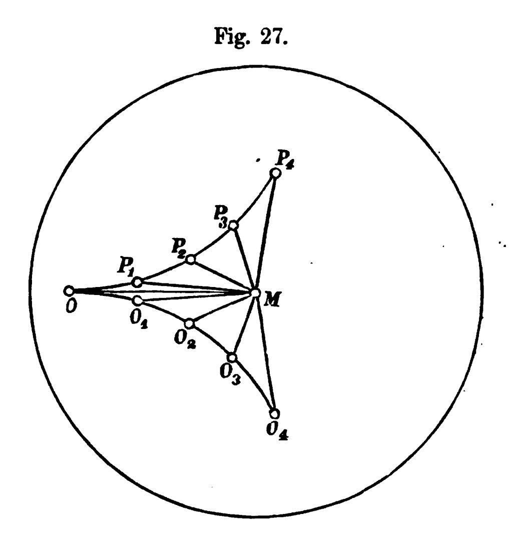
Sind BC und B_1C_1 zwei Lagen von unendlich kleinem Abstand, und legt man durch B und C Grösstkreise rechtwinklig zu den Bahnlinien BB_1 und CC_1, so schneiden sich diese in dem Pol

oder augenblicklichen Drehpunkt O, dem ein Halbmesser OM der Kugel als augenblickliche Drehachse entspricht. Also:

Die Bewegung einer Figur auf der Kugelfläche kann man in jedem Augenblick auffassen als Drehung um einen Pol O auf der Kugelfläche oder um einen Halbmesser OM der Kugel als augenblickliche Drehachse. Der Pol O und die entsprechende Drehachse OM sind bestimmt durch die augenblicklichen Bewegungsrichtungen zweier Punkte der Figur. Dementsprechend kann man die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt M in jedem Augenblick auffassen als Drehung um eine durch M gehende Achse; die Richtung der Drehachse ist bestimmt durch die augenblicklichen Bewegungsrichtungen zweier Punkte.

Bei einer gegebenen Bewegung entspricht jeder Lage der beweglichen Figur ein besonderer Pol O und eine besondere augenblickliche Drehachse OM.

Fig. 27.



Der Ort der Pole ist die sphärische Polbahn (O), der Ort der augenblicklichen Drehachsen die Kegelfläche (OM) mit der Spitze im Mittelpunkt M der Kugel. Denkt man sich nnn die feste Kugel mit einem ihr genau aufgepassten Überzuge versehen und auf letzteren die Figur BC gezeichnet, so wird bei der Bewegung der Figur der ganze Überzug auf der festen Kugel gleiten. Dort wo der augenblickliche Pol O liegt, wird man Kugel und Überzug durch eine Nadel gegen einander feststellen können, ohne dass dadurch die vorgeschriebene Bewegung des Überzuges mit der aufgezeichneten Figur gehindert wird. Nennt man P den Punkt des Überzuges, der mit dem Pol O der festen Kugel zusammenfällt, so wird ebenso wie bei der ebenen Bewegung (S. 19)

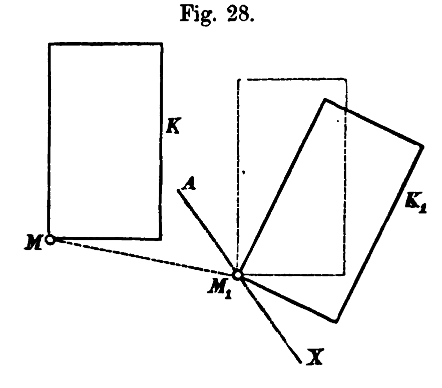
jedem Punkt O ein bestimmter Punkt P entsprechen. Der Ort der Punkte P ist eine sphärische Kurve des Überzuges, d. h. mit der beweglichen Figur verbunden, und heisst die bewegliche Polbahn. Sie ist die Leitlinie einer Kegelfläche (PM) mit der Spitze im Mittelpunkt M der Kugel. Die bewegliche Polbahn (P) hat mit der festen Polbahn (O) stets einen Punkt gemeinsam, der auf beiden Bahnen stets um gleiche Bogenlängen sich verschiebt; die bewegliche Polbahn rollt auf der festen Polbahn, oder auch: die bewegliche, mit der Figur verbundene Kegelfläche (PM) rollt auf der festen Kegelfläche. Also:

Jede Bewegung einer sphärischen Figur auf ihrer Kugelfläche kann man auffassen als das Rollen einer mit der Figur verbundenen sphärischen Polbahn auf einer festen sphärischen Polbahn. Dementsprechend ist die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt M gleichwerthig mit dem Rollen einer mit dem Körper verbundenen Kegelfläche auf einer festen Kegelfläche; die Kegel haben den festen Drehpunkt M gemeinsam zur Spitze.

5. Allgemeine Bewegung eines Körpers; Schraubenbewegung.

K und K_1 seien zwei unendlich benachbarte Lagen eines Körpers; irgend ein Punkt M beschreibe beim Übergang aus der einen in die andere die Bahnlinie MM_1; dann kann man den Übergang dadurch bewerkstelligen, dass man dem Körper zunächst eine Verschiebung um MM_1 ertheilt, wodurch der Körper in die punktirte Zwischenlage gelangt, und ihn sodann noch um den Punkt M_1 dreht. Diese unendlich kleine Drehung um den Punkt M_1 ist nach S. 23 zurückzuführen auf eine Drehung um eine durch M_1 gehende Achse AX.

Fig. 28.



Also: **Jede Bewegung eines Körpers kann für einen Augenblick aufgefasst werden als zusammengesetzt aus einer Verschiebung und einer Drehung um eine augenblickliche Drehachse.**

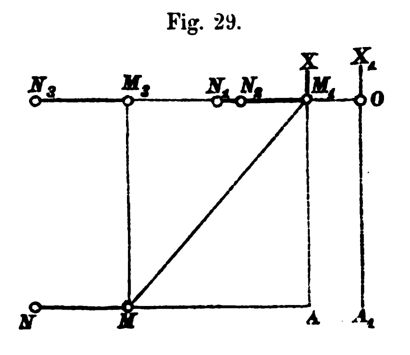
Befinden sich die beiden Lagen K und K_1 aber in endlichem Abstande, so muss man, wenn der eine Punkt des Körpers in der gegebenen Bahnlinie MM_1 geführt wird, dem Körper, damit er eine gegebene Bewegung ausführe, gleichzeitig eine Drehung um den richtig geführten Punkt M ertheilen, welche nach S. 24 gleichwerthig ist dem Rollen einer mit dem Körper verbundenen Kegelfläche auf einer anderen Kegelfläche, die mit dem richtig geführten Punkt M parallel verschoben wird. Die Kegel haben den Punkt M gemeinsam zur Spitze. Also:

Die beliebige Bewegung eines Körpers ist gleichwerthig dem Rollen eines mit dem Körper verbundenen Kegels auf einem zweiten Kegel, der eine Verschiebung erleidet. Die Verschiebung stimmt überein mit der Bahnlinie desjenigen Körperpunktes, der die gemeinsame Spitze der Kegel bildet.

Je nachdem der führende Punkt M am Körper anders gewählt wird, ergeben sich andere Verschiebungen und Rollbewegungen; es lässt sich daher eine Bewegung in unendlich vielen verschiedenen Weisen auf Verschiebung und Rollen zurückführen. Einfacher und zugleich bestimmter lässt sich aber die Bewegung eines Körpers auf **Schraubenbewegungen** zurückführen.

Betrachtet man wiederum eine unendlich kleine Bewegung eines Körpers, wobei der Punkt M nach M_1 gelangt und ausserdem noch eine Drehung um die Augenblicksachse AM_1X ausführt, und legt durch den Körperpunkt M eine zur Achse AX rechtwinklige Schnittebene, so möge eine Schnittfigur MN (Fig. 29) entstehen. Bei der Verschiebung gelangt diese in die Lage M_1N_1, dann ist aber noch eine Drehung um AX erforderlich, durch welche die

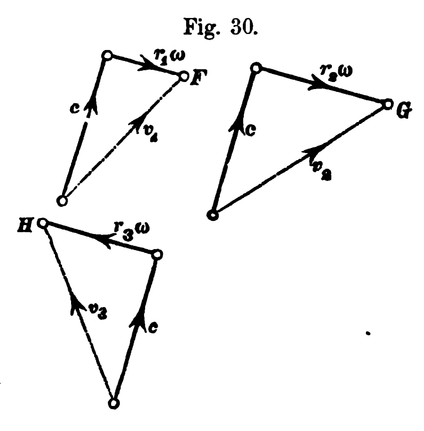
Fig. 29.



Figur in die Endlage $M_1 N_2$ gelangen möge. Enthält die Schnittfigur mindestens drei nicht in dieselbe Gerade fallende Punkte, so bestimmt sie (nach S. 10) die Bewegung des Körpers vollständig. Man verschiebe nun die Schnittfigur MN zunächst rechtwinklig zu ihrer Ebene in ihre neue, durch M_1 gehende Parallelebene, in der sie die Zwischenlage $M_3 N_3$ einnehmen möge; dann ist nur noch eine Überführung in die derselben Ebene angehörende Lage $M_1 N_2$ erforderlich. Diese Bewegung kann man aber nach S. 14 durch Drehung um einen in der Ebene liegenden Pol O oder um eine zur Ebene rechtwinklige Achse $A_1 O X_1$ ausführen. Diese letztere Achse fällt im Allgemeinen nicht mit AX zusammen, ist aber dazu parallel. Hiermit ist die Bewegung der Schnittfigur MN und damit diejenige des Körpers zurückgeführt auf eine Verschiebung und eine Drehung um eine zur Verschiebungsrichtung parallele Achse; eine solche Bewegung aber (Drehung um eine Achse und Verschiebung parallel oder längs derselben) nennt man nach dem 1. Theile, S. 309 eine Schraubenbewegung.

Ist c die Verschiebungsgeschwindigkeit längs der Achse und ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Schraubenachse, so sind die Geschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 dreier Punkte in den Abständen r_1, r_2 und r_3 von der Achse der Grösse nach dargestellt als Hypothenusen über den Katheten c und $r_1 \omega$, c und $r_2 \omega$ und c und $r_3 \omega$ (Fig. 30). Sind für einen Augenblick die Lage der Schraubenachse, die Geschwindigkeiten c und ω gegeben, so ist für jeden Punkt des Körpers die Geschwindigkeit v mittels eines Geschwindigkeitsdreiecks nach Grösse und Richtung zu bestimmen. Dabei ist bemerkenswerth, dass die Kathete c bei allen diesen Dreiecken nach Grösse und Richtung dieselbe ist. Denkt man sich die Geschwindigkeitsdreiecke nicht wie in Fig. 30 in die Zeichenebene niedergeschlagen, sondern mit den wahren Richtungen im Raume konstruirt und mit den Katheten c aneinander gelegt, so

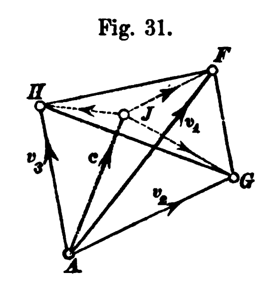
Fig. 30.



bilden die Umfangsgeschwindigkeiten der Drehung $r_1 \omega$, $r_2 \omega$ und $r_3 \omega$ Strahlen, die zu c rechtwinklig stehen, d. h. in einer zu c rechtwinkligen Ebene liegen. In dieser Ebene befinden sich also auch die Endpunkte F, G, H der wahren Geschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3.

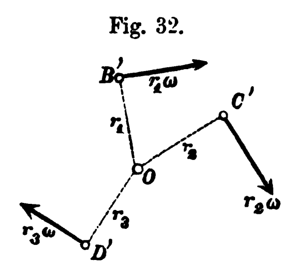
Hierauf gründet sich die zeichnerische Festlegung der Schraubenachse $X_1 X_1$, wenn von drei Punkten B, C und D des Körpers die wahren Geschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 nach Grösse und Richtung gegeben sind. Man trägt nämlich diese drei Geschwindigkeiten von einem Punkt A aus nach Grösse und Richtung auf (Fig. 31), legt durch deren Endpunkte F, G und H eine Ebene E und zieht von A aus eine Rechtwinklige AJ zur Ebene, so ist $AJ = c$ die Verschiebungsgeschwindigkeit der Schraubenbewegung. Zugleich ist nach Grösse und Richtung $JF = r_1 \omega$; $JG = r_2 \omega$; $JH = r_3 \omega$.

Fig. 31.



Projicirt man nun die Punkte B, C und D des Körpers auf eine zu c rechtwinklige Ebene mit den Projektionen B', C' und D' (Fig. 32) und trägt an diesen Projektionen die Umfangsgeschwindigkeiten $r_1 \omega$, $r_2 \omega$ und $r_3 \omega$ auf, so müssen Gerade, die man durch B', C' und D' in dieser Ebene rechtwinklig zu jenen Umfangsgeschwindigkeiten zieht, sich in der Projektion O der Schraubenachse schneiden. Hiermit stehen dann auch die Drehungshalbmesser r_1, r_2 und r_3 fest und somit auch die Winkelgeschwindigkeit ω. Da die Lage des Punktes O schon durch zwei Gerade $B'O$ und $C'O$ bestimmt ist, so ist die Gerade $D'O$ zur Bestimmung überflüssig. Auch ist ω schon aus $r_1 \omega$ und $OB' = r_1$ gefunden, mithin sind hierzu die Grössen r_2 und r_3 nicht mehr nöthig. In den Geschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 von drei bestimmten Punkten B, C und D des Körpers liegen also drei Grössen mehr vor, als für die Ermittelung der augenblicklichen Schraubenbewegung erforderlich sind. Es hängt dies damit zusammen, dass nach S. 11

Fig. 32.



zur Bestimmung der Lage eines Körpers nicht neun, sondern nur sechs Stücke erforderlich sind.

Sämmtliche Punkte der Schraubenachse haben Geschwindigkeiten von der übereinstimmenden Grösse c, deren Richtungen sämmtlich in diese Achse fallen, weil die Drehungshalbmesser r Null sind. Legt man durch den Körper irgend eine Gerade, welche der Schraubenachse parallel ist, so haben deren Punkte wohl auch Geschwindigkeiten gleicher Grösse und Richtung, doch bildet letztere mit der Schraubenachse einen Winkel α, für den $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r\omega}{c}$, der also von Null verschieden ist. Legt man aber durch den Körper eine Gerade, die mit der Schraubenachse nicht parallel ist, deren Punkte also verschiedene Abstände von der Schraubenachse haben, so sind die Geschwindigkeiten dieser Punkte nach Grösse und Richtung verschieden. Hiernach kommt die kennzeichnende Eigenschaft der Schraubenachse, dass die Geschwindigkeiten aller ihrer Punkte in der Richtung der Achse liegen, nur der einen Geraden zu. Während also der augenblickliche Bewegungszustand eines Körpers (nach S. 25) in unendlich vielen verschiedenen Weisen auf eine Verschiebung und eine Drehung zurückgeführt werden kann, ist die Zurückführung auf eine Schraubenbewegung nur in einer Weise möglich. Daher hat man den Satz:

Jede Bewegung eines Körpers kann für einen Augenblick, und zwar nur in einer Weise, auf eine Schraubenbewegung zurückgeführt werden.

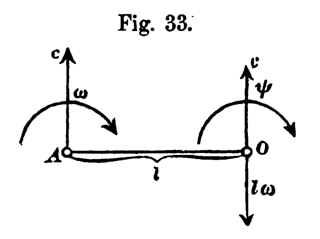
C. Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen eines Körpers.

I. Drehung und Verschiebung.

Ein Körper habe eine Drehung um eine Achse A mit einer Winkelgeschwindigkeit ω und erleide gleichzeitig eine Verschiebung in einer Richtung, rechtwinklig zu der Achse, mit der Geschwindigkeit c (Fig. 33). Dieser Fall kommt z. B. vor, wenn sich ein

Rad um eine Achse dreht, die Achse aber nicht festliegt, sondern verschoben wird. (Ein besonderer Fall hiervon ist jedes rollende Rad.) Schneidet man den Körper durch eine zur Achse A rechtwinklige Ebene E, so bewegt sich die Schnittfigur nur in ihrer Ebene; es ist daher diese zusammengesetzte Bewegung eine ebene Bewegung, die nach S. 14 für jeden Augenblick als Drehung um einen Pol O oder um eine rechtwinklig zur Ebene stehende Achse O aufgefasst werden kann. Legt man durch A in der Ebene E eine Gerade $AO = l$, rechtwinklig zu c, so bekommt der Endpunkt O in Folge der Winkelgeschwindigkeit ω eine Geschwindigkeit $l\omega$ nach unten, in Folge der Verschiebungsgeschwindigkeit c, an der alle Punkte übereinstimmend theilnehmen, eine Geschwindigkeit c nach oben. Ist nun

Fig. 33.



1) $$l\omega = c,$$

so wird die Geschwindigkeit in O zu Null; hierdurch kennzeichnet sich der Pol O und die in O rechtwinklig zur Bildebene errichtete augenblickliche Drehachse. Nennt man ψ die zu suchende Winkelgeschwindigkeit um O, so muss ψ derartig bestimmt werden, dass daraus der gegebene Geschwindigkeitszustand wieder hervorgeht. Die mit der Achse A zusammenfallenden Punkte des Körpers hatten aber nur die Geschwindigkeit c, rechtwinklig zu OA; durch ψ bekommen sie eine Geschwindigkeit $l\psi$ in derselben Richtung mit c, daher muss

$$l\psi = c$$

sein, und weil auch $l\omega = c$ (Gl. 1), so wird

2) $$l = \frac{c}{w} \quad \text{und} \quad \psi = \omega.$$ Das heisst:

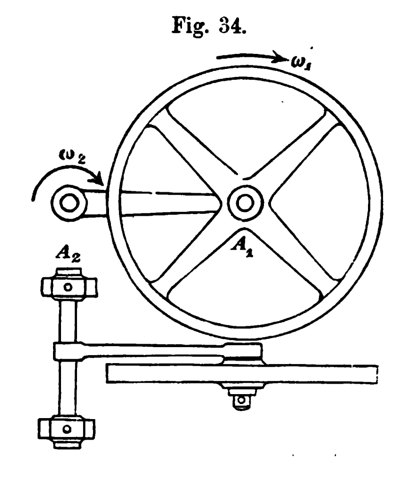
Eine Drehung um eine Achse A mit der Winkelgeschwindigkeit ω und einer gleichzeitigen Verschiebung rechtwinklig zu O mit der Geschwindigkeit c lassen sich zu einer einzigen Drehung um eine Achse $O \parallel A$ mit der Winkelgeschwindigkeit ω zusammensetzen. A und O liegen in einer zu c rechtwinkligen Ebene; ihr Abstand ist $l = c : w$. Umgekehrt

lässt sich natürlich eine Drehung um O mit der Winkelgeschwindigkeit ω zerlegen in eine Drehung um eine zu O parallele Achse A im Abstande l von O mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω und eine gleichzeitige Verschiebung rechtwinklig zu der durch O und A gelegten Ebene mit der Geschwindigkeit $c = l\omega$.

2. Drehungen um parallele Achsen.

Dreht sich (Fig. 34) ein Körper, vielleicht ein Rad, um eine Achse A_1 mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_1, befindet sich aber die Achse A_1 an einem Kurbelarme von der Länge l, der sich zugleich mit der Geschwindigkeit ω_2 um eine Achse A_2 dreht, so hat der Körper eine von beiden Drehungen beeinflusste Bewegung, die aber, weil sie eine ebene Bewegung ist, in jedem Augenblick auf eine einzige Drehung um eine Achse O zurückgeführt werden kann.

Fig. 34.



Haben ω_1 und ω_2 übereinstimmenden Drehsinn, so wähle man in der durch A_1 und A_2 gehenden Ebene (Fig. 35) eine zu beiden parallele Achse O, welche von A_1 und A_2 die Abstände l_1 und l_2 hat; diese Achse empfängt von ω_1 eine Geschwindigkeit $l_1\omega_1$ aufwärts, von ω_2 eine Geschwindigkeit $l_2\omega_2$ abwärts. Die Gesammtgeschwindigkeit der Achse O ist also Null, wenn

Fig. 35.

$$3) \quad l_1\omega_1 = l_2\omega_2 \quad \text{oder} \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Hierdurch ist die augenblickliche Drehachse gefunden. Für ihre Winkelgeschwindigkeit ψ ist Bedingung, dass die zur Zeit in den gegebenen Achsen befindlich gedachten Körperpunkte ihre wahren Geschwindigkeiten wiedererhalten. A_1 bekommt durch ω_2 eine Geschwindigkeit

$(l_1 + l_2)\omega_2$, durch ψ eine Geschwindigkeit $l_1 \cdot \psi$. Ein Körperpunkt A_2 würde durch ω_1 eine Geschwindigkeit $(l_1 + l_2)\omega_1$, durch ψ eine Geschwindigheit $l_2 \psi$ erhalten. Daher muss stattfinden:

$$l_1 \psi = (l_1 + l_2)\omega_2 \quad \text{uud} \quad l_2 \psi = (l_1 + l_2)\omega_1, \text{ d. h.}$$

$$(l_1 + l_2)\psi = (l_1 + l_2)(\omega_1 + \omega_2) \quad \text{oder}$$

4) $$\psi = \omega_1 + \omega_2. \quad \text{Also:}$$

Zwei gleichzeitige Drehungen von übereinstimmendem Sinn um Parallelachsen A_1 und A_2 können in jedem Augenblicke zu einer einzigen Drehung um eine in der Ebene der A_1 und A_2, zwischen beiden liegende und zu ihnen parallele Achse O ersetzt werden. Die Abstände l_1 und l_2 der augenblicklichen Drehachse O von den beiden gegebenen verhalten sich umgekehrt wie die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten. Die Winkelgeschwindigkeit um O ist gleich der Summe der beiden gegebenen.

Für die vorstehende Entwickelung ist es gleichgültig, ob sich der Körper in erster Linie mit ω_1 um A_1 und in zweiter Linie mit ω_2 um A_2 dreht, oder umgekehrt.

Eine Drehung um eine Achse mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit und einem bestimmten Drehsinne lässt sich durch eine **Drehungsstrecke** darstellen, indem man auf der Achse eine Länge abträgt, die nach einem bestimmten Mafsstabe die Winkelgeschwindigkeit ausdrückt, und indem man ferner auf der Achse eine Pfeilspitze so anbringt, dass man, gegen die Spitze sehend, den Drehsinn positiv, rechts herum ↷, im Sinne der Zeigerbewegung einer Uhr, erblickt. Geschieht dies, so kann man behufs der Zusammensetzung der Winkelgeschwindigkeiten die Drehungsstrecken wie Einzelkräfte behandeln und nach den dafür im 1. Theil, S. 111 entwickelten Regeln zusammensetzen und zerlegen.

Fig. 36.

Die in Figur 35 durch Drehungspfeile gezeichneten Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 bilden nach vorstehender Erklärung zwei parallele Drehungsstrecken ω_1 und ω_2 gleichen Sinnes im Abstande l (Fig. 36). Die Mittelstrecke ist nach 1. Theil, S. 103, gleich der Summe der gegebenen, liegt mit ω_1 und ω_2 in derselben Ebene zwischen beiden und ist mit ihnen parallel. Ihre Abstände von

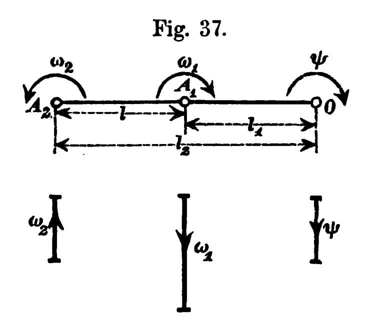
den gegebenen Drehungsstrecken verhalten sich umgekehrt wie diese Strecken, d. h.

$$l_1 : l_2 = \omega_2 : \omega_1 .$$

Die so erhaltene Mittelstrecke $\psi = \omega_1 + \omega_2$ entspricht genau dem Ergebnisse der Zusammensetzung der Winkelgeschwindigkeiten auf Seite 31.

Ist der Drehsinn von ω_1 dem von ω_2 entgegengesetzt (Fig. 37), so liegt die augenblickliche Drehachse O auch in der Ebene der A_1 und A_2 und zu ihnen parallel, aber nicht zwischen ihnen, sondern ausserhalb derselben, u. zw. auf der Seite der Achse mit der grösseren Winkelgeschwindigkeit. Wählt man nämlich für $\omega_1 > \omega_2$ rechts von A_1 eine Achse O mit den Abständen l_1 und l_2 von A_1 und A_2, so empfängt O vermöge ω_1 eine Geschwindigkeit $l_1 \omega_1$ abwärts, vermöge ω_2 eine Geschwindigkeit $l_2 \omega_2$ aufwärts, so dass die Gesammtgeschwindigkeit von O wiederum Null wird für

Fig. 37.



$$5) \qquad l_1 \omega_1 = l_2 \omega_2 \text{ oder } \frac{l_1}{l_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Für die Winkelgeschwindigkeit ψ der augenblicklichen Drehachse O gilt wieder

$$l_2 \psi = \omega_1 l = \omega_1 (l_2 - l_1)$$
$$l_1 \psi = \omega_2 l = \omega_2 (l_2 - l_1) \text{ also}$$
$$(l_2 - l_1) \psi = (\omega_1 - \omega_2)(l_2 - l_1), \text{ d. h.}$$
$$6) \qquad \psi = \omega_1 - \omega_2 .$$

Die Zusammensetzung der Drehungsstrecken ω_1 und ω_2 zu einer Mittelstrecke ψ nach der Lehre von der Zusammensetzung paralleler Kräfte (1. Theil, S. 104) liefert nach Fig. 37 dasselbe Ergebnis.

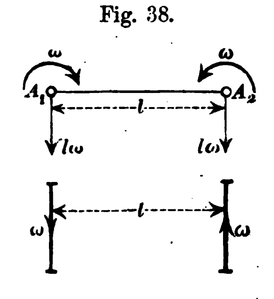
Gl. 5 kann man auch schreiben:

$$\frac{l_1}{l_2 - l_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \text{ oder}$$
$$7) \qquad l_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} l .$$

Stellt man sich nun vor, dass ω_2 unverändert bleibt, dass aber das ursprünglich grössere ω_1 sich allmählich ω_2 nähert, so dass

$\psi = \omega_1 - \omega_2$ mehr und mehr gegen Null geht, so wird l_1 grösser und grösser, und im Grenzfalle $\omega_1 = \omega_2$ wird $\psi = 0$ und $l_1 = \infty$, d. h. für zwei gleiche und entgegengesetzte Winkelgeschwindigkeiten um Parallelachsen giebt es keine in der Endlichkeit liegende augenblickliche Drehachse (ebenso wenig, wie zwei gleiche Parallelkräfte entgegengesetzten Sinnes eine in der Endlichkeit liegende Mittelkraft haben). Zwei solche gleiche parallele Drehungsstrecken entgegengesetzten Sinnes nennt man ein **Drehungspaar** (entsprechend der Bezeichnung Kräftepaar, 1. Theil, S. 105). Da es gleichwerthig ist einer Drehung um eine unendlich ferne Gerade in der Ebene des Drehungspaares, und da in Bezug auf eine unendlich ferne Achse alle Drehungshalbmesser in dem Verhältnis Eins zu einander stehen, so haben alle Punkte des Körpers Geschwindigkeiten von gleicher Grösse c, rechtwinklig zur Ebene des Drehungspaares. Die Geschwindigkeit c ergiebt sich einfach durch Beobachtung der Geschwindigkeit der Punkte der Achse A_1 (Fig. 38), nämlich $c = l\omega$ nach unten, ebenso für A_2 zu $c = l\omega$ nach unten.

Fig. 38.



Ein Drehungspaar ist gleichwerthig einer Verschiebung, rechtwinklig zur Ebene des Paares. Das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit ω und dem Abstand l der beiden Achsen heisst das Moment des Paares und bezeichnet die Grösse $c = l\omega$ der Verschiebungs-Geschwindigkeit. Da die Verschiebungs-Geschwindigkeit c allen Punkten des Körpers gemeinsam ist, c also keine bestimmte Lage hat, so haben auch die Achsen eines Drehungspaares keine bestimmte Lage, können vielmehr, ebenso wie Kräftepaare, nicht nur in ihrer Ebene, sondern auch in Parallelebenen beliebig verschoben und verwandelt werden; es kommt bei ihnen nur auf die Grösse ihres Momentes, d. h. der gleichwerthigen Verschiebungs-Geschwindigkeit $c = l\omega$, auf die Richtung dieser zu ihren Ebenen rechtwinkligen Geschwindigkeit c und den Sinn von c an. Eine einzelne Drehungsstrecke dagegen hat wie eine Einzelkraft (s. 1. Theil, S. 109) eine bestimmte Lage. Jede Verschiebungs-Geschwindigkeit kann durch ein Drehungspaar ausgedrückt werden.

3. Drehungen um sich schneidende Achsen.

Dreht sich der Körper K um die Achse OA_2 (Fig. 39) und diese wieder um die Achse OA_1, so sagt man, der Körper habe gleichzeitig zwei Drehungen um OA_1 und OA_2 mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2, welche in Fig. 40 als Drehungsstrecken aufgetragen sind. Würde sich ein Körperpunkt bei O befinden, so hätte dieser die Geschwindigkeit Null; daher kann die Bewegung des Körpers als Drehung um einen festen Punkt O und nach S. 23 für jeden Augenblick als Drehung um eine durch O gehende augenblickliche Drehachse OP aufgefasst werden. Es ist die Richtung von OP und ihre Winkelgeschwindigkeit ψ zu bestimmen, u. zw. im Hinblick darauf, dass ein beliebiger Punkt P der Achse die Geschwindigkeit Null hat. Wählt man OP in der Ebene OA_1A_2 und hat der Punkt P von OA_1 und OA_2 die rechtwinkligen Abstände x_1 und x_2, so bekommt P durch ω_1 eine Geschwindigkeit $x_1\omega_1$ nach unten, durch ω_2 eine Geschwindigkeit $x_2\omega_2$ nach oben; ist also $x_1\omega_1 = x_2\omega_2$, so hat P die Gesammtgeschwindigkeit Null. Nennt man die Winkel der OP mit OA_1 und OA_2 bezw. β_1 und β_2, ihre Summe $\beta_1 + \beta_2 = \alpha$, so ist

Fig. 39.

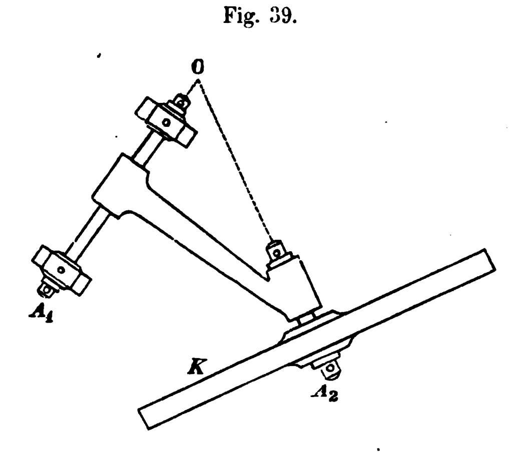
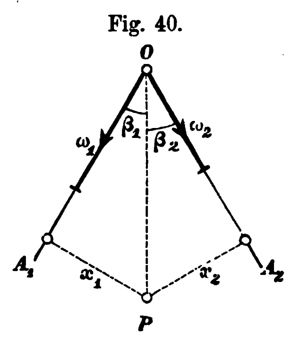


Fig. 40.



$$x_1 = OP \sin \beta_1; \quad x_2 = OP \sin \beta_2,$$

daher muss $$\omega_1 \sin \beta_1 = \omega_2 \sin \beta_2, \text{ d. h.}$$

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \text{sein.} \tag{8}$$

Um die Winkelgeschwindigkeit ψ der Achse OP zu erhalten, fällt man von A_2 aus die Winkelrechten A_2Q und A_2R (Fig. 41), dann muss

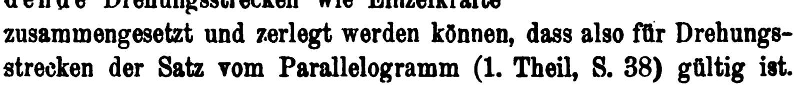
Fig. 41.

$$\psi \cdot \overline{QA_2} = \omega_1 \cdot \overline{RA_2} \quad \text{oder}$$

$$\psi \cdot \overline{OA_2} \cdot \sin\beta_2 = \omega_1 \cdot \overline{OA_2} \cdot \sin\alpha, \quad \text{d. h.}$$

$$9) \quad \psi = \omega_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta_2} = \omega_2 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta_1} \quad \text{sein.}$$

Es lässt sich aber zeigen, dass nicht nur parallele, sondern auch sich schneidende Drehungsstrecken wie Einzelkräfte zusammengesetzt und zerlegt werden können, dass also für Drehungsstrecken der Satz vom Parallelogramm (1. Theil, S. 38) gültig ist.



Konstruirt man nämlich (Fig. 42) aus $OA_1' = \omega_1$ und $OA_2' = \omega_2$ ein Parallelogramm, so ist dessen Diagonale die gesuchte Drehungsstrecke ψ nach Grösse, Richtung und Sinn. Denn es ist in dem Dreieck $OA_1'P'$

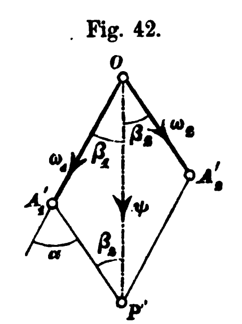


Fig. 42.

$$10) \quad \sin\beta_1 : \sin\beta_2 : \sin\alpha = \omega_2 : \omega_1 : \psi,$$

was den Gl. 8 und 9 entspricht.

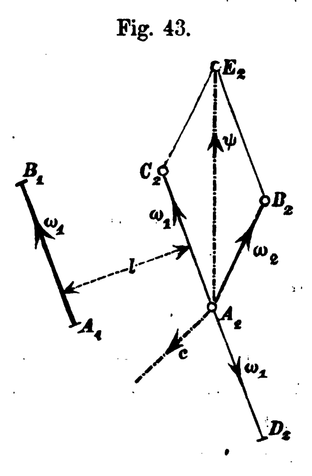
Wie aus dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte der Satz vom Parallelepiped, vom Vieleck und der geometrischen Summe der Kräfte hergeleitet wurde (1. Theil, S. 39—41), so kann dies auch hier bezüglich der Drehungsstrecken in gleicher Weise geschehen.

4. Drehungen um Achsen, die nicht in derselben Ebene liegen.

Sind (Fig. 43) $A_1B_1 = \omega_1$ und $A_2B_2 = \omega_2$ zwei zu einander windschiefe Drehungsstrecken, so lege man durch A_2 zwei Drehungsstrecken A_2C_2 und A_2D_2, beide $=$ und $\parallel A_1B_1$, aber unter sich von entgegengesetztem Sinne. Diese beiden heben sich gegenseitig auf, denn zwei gleiche entgegengesetzte Drehungen um dieselbe Achse tilgen sich gegenseitig. A_2B_2 und A_2C_2 lassen sich nach

dem Parallelogrammgesetze zu einer Drehungsachse $A_2 E_2 = \psi$ vereinigen. $A_1 B_1$ und $A_2 D_2$ aber bilden ein Drehungspaar von dem Momente $l \cdot \omega_1$, wenn l der Abstand des Punktes A_2 von der Richtung $A_1 B_1$; dies Drehungspaar ist gleichbedeutend mit einer zur Ebene $B_1 A_1 A_2$ rechtwinkligen Verschiebungsgeschwindigkeit $c = l \cdot \omega_1$. Hiermit sind die gegebenen Drehungsstrecken ω_1 und ω_2 zurückgeführt auf eine Drehungsstrecke ψ und eine Verschiebungsgeschwindigkeit c.

Fig. 43.



Auf Grund dieses Verfahrens kann man beliebig viele im Raume zerstreute Drehungsstrecken zusammensetzen, indem man sie wie Einzelkräfte behandelt und mit ihnen genau so verfährt, wie im 1. Theil, S. 111 ausführlich beschrieben wurde. Auch gleichzeitig noch gegebene Verschiebungsgeschwindigkeiten erschweren die Aufgabe nicht, da man sie als Drehungspaare darstellen kann. Wie man bei der Zusammensetzung von Kräften zu einer Einzelkraft und einem Kräftepaare gelangt, so erhält man hier als Endergebnis eine Drehungsstrecke und ein Drehungspaar, d. h. eine Drehungsstrecke und eine Verschiebungsgeschwindigkeit; und wie man dort durch geeignete Parallelverschiebung der Einzelkraft erreichen konnte, dass die Kräftepaarsachse so klein wie möglich und parallel der Einzelkraft wurde, so kann man in entsprechender Weise auch hier dazu gelangen, dass die Verschiebungsgeschwindigkeit so klein wie möglich und parallel der Drehungsstrecke werde, d. h. dass schliesslich eine Schraubenbewegung entsteht. Die Achse der Schraubenbewegung entspricht also der Centralachse (1. Theil, S. 115) einer Kräftegruppe.

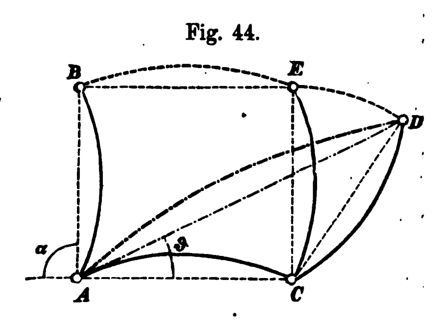
5. Bewegung eines Punktes in einer Bahnlinie mit beliebiger Bewegung.

Wenn ein Punkt sich in einer beliebigen Bahnlinie bewegt, die selbst eine Verschiebung erleidet, so gilt nach 1. Theil S. 26

für die wahre Bewegung des Punktes, sowie auch für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung derselben einfach das Parallelogrammgesetz. Das Ergebnis wird aber zum Theil ein anderes, wenn die Bahnlinie eine **beliebige** Bewegung ausführt, d. h. neben der Verschiebung auch eine Drehung erleidet.

Während eines Zeittheilchens dt durchlaufe der Punkt das Bahntheilchen AB (Fig. 44), dieses aber gehe während derselben Zeit in die Lage CD über, indem ausser einer Verschiebung um das Stück AC noch eine Drehung um eine durch C gehende Achse erfolge. Ist nun w die Geschwindigkeit des Punktes längs der Bahnlinie oder seine scheinbare (relative) Geschwindigkeit in Bezug auf dieselbe, u die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Anfangspunkt A des relativen Bahntheilchens bewegt, v endlich die Geschwindigkeit der wahren (resultirenden) Bewegung von A nach D, so ist, wenn man die Sehnen $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ zieht, nach dem Begriffe der Geschwindigkeit einer krummlinigen Bewegung (S. 3) $\overline{AB} = w \cdot dt$; $\overline{AC} = u \cdot dt$; $\overline{AD} = v \cdot dt$. In Folge der Drehung der Bahnlinie verändert sich nun der Winkel α zwischen den Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ auf $ACD = \alpha + d\alpha$. Daher wird, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor dt in $w\,dt$, $u\,dt$ und $v\,dt$ fortlässt,

Fig. 44.



$$v = \sqrt{u^2 + w^2 - 2uw \cos(\alpha + d\alpha)};$$

da aber $\cos(\alpha + d\alpha) = \cos\alpha - \sin\alpha \cdot d\alpha$, sich also von $\cos\alpha$ nur um ein unendlich kleines unterscheidet, so wird

$$1) \qquad v = \sqrt{u^2 + w^2 - 2uw \cos\alpha} \quad \text{und}$$

$$\sin\vartheta : \sin(\alpha + d\alpha) = w : v, \quad \text{d. h.}$$

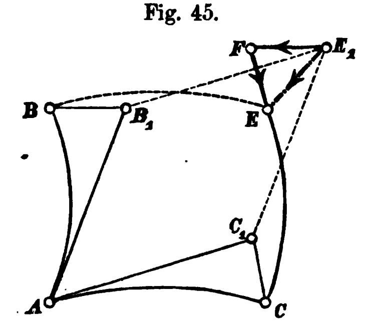
$$2) \qquad \sin\vartheta = \frac{w}{v} \sin\alpha .$$

Richtung und Grösse der wahren Geschwindigkeit v ändern sich hiernach in Folge der Drehung der Bahnlinie nicht um eine endliche Grösse. **Die wahre Geschwindigkeit** v **ist die**

geometrische Summe aus der scheinbaren Geschwindigkeit w und der Geschwindigkeit u, mit welcher sich der Anfangspunkt des Theilchens der scheinbaren Bahnlinie bewegt.

Anders ist es aber mit der Beschleunigung. Erfährt die Bahnlinie nur eine Verschiebung, aber keine Verdrehung, so ist, wie im 1. Theil, S. 26 bewiesen wurde, die wahre Beschleunigung die Resultirende aus der Beschleunigung des Punktes in seiner beweglichen Bahnlinie und der Beschleunigung, mit der die Verschiebung der Bahnlinie erfolgt. Dieses Ergebnis soll hier, um das Verständnis des Folgenden zu erleichtern, noch einmal mittels des Begriffes Ablenkung (Deviation) (s. S. 8) gezeigt werden. Erfolgte die Bewegung in der sich verschiebenden Bahnlinie ohne Beschleunigung, d. h. geradlinig und gleichförmig, so würde der Punkt etwa von A nach B_1 (Fig. 45) gelangen, und die Strecke $B_1 B$ ist die Ablenkung in Folge der Beschleunigung p_1 der scheinbaren Bewegung, d. h. nach Gl. 14, S. 8

Fig. 45.



$$B_1 B = \frac{p_1 dt^2}{2}.$$

Würde die Bahnlinie sich gleichförmig und geradlinig verschieben, so gelangte ihr Anfangspunkt nach C_1 anstatt nach C. Ist nun p_2 die Beschleunigung, mit welcher sich der Anfangspunkt des relativen Bahntheilchens bewegt, so ist deren Wirkung die Ablenkung $C_1 C$, d. h.

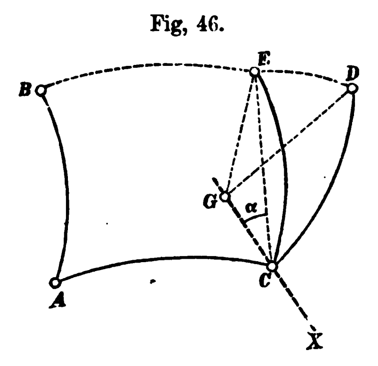
$$C_1 C = p_2 \frac{dt^2}{2}.$$

Würden beide Seitenbewegungen ohne Beschleunigung erfolgen, so müsste der Punkt die Diagonale $A E_1$ des aus den geraden Linien $A B_1$ und $A C_1$ gezeichneten Parallelogramms beschreiben; da er aber in Wirklichkeit nach E gelangt, so muss, wenn seine wahre Beschleunigung p genannt wird, seine wahre Ablenkung

$$E_1 E = p \frac{dt^2}{2} \quad \text{sein.}$$

Man erkennt nun leicht $E_1 E$ als geometrische Summe von $B_1 B$ und $C_1 C$. Würde man nämlich AB um die Strecke AC_1 parallel verschieben, so würde sich AB tangential an $C_1 E_1$ legen und B nach F fallen, wenn $E_1 F \parallel B_1 B$ und $E_1 F = {}^1/_2\, p_1 dt^2$, und durch nochmalige Verschiebung um $C_1 C \# FE$ gelangt AB aus der (nicht gezeichneten) Zwischenlage $C_1 F$ in die Endlage CE, so dass $FE = C_1 C = {}^1/_2\, p_2 dt^2$. Ebenso nun, wie die wahre Ablenkung $E_1 E = {}^1/_2\, p\, dt^2$ die geometrische Summe der Seitenablenkungen ${}^1/_2\, p_1 dt^2$ und ${}^1/_2\, p_2 dt^2$ ist, muss auch die wahre Beschleunigung p die geometrische Summe der Seitenbeschleunigungen p_1 und p_2 sein.

Fig, 46.



Die Folge der Drehung der Bahnlinie ist nun eine Verrückung des Endpunktes der Bewegung von E nach D (Fig. 46), und diese kann als eine Ablenkung von der reinen Verschiebung, d. h. als Folge einer dritten Beschleunigung p_3 aufgefasst werden, so dass

$$ED = p_3 \frac{dt^2}{2} \quad \text{wird.}$$

Ist nun CX die augenblickliche Drehachse für die Bahnlinie, um welche sie noch gedreht werden muss, nachdem man sie (gemäss S. 24) entsprechend der Bahnlinie AC des Punktes A, verschoben hat, und fällt man von E eine Winkelrechte EG auf die Drehachse, so wird, wenn man $\sphericalangle EGD = d\vartheta$ setzt, $ED = EG \cdot d\vartheta$. Nennt man ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Achse CX, α den Winkel, den letztere mit dem relativen Bahntheilchen CE bildet, so ist, weil $CE = w \cdot dt$, $EG = CE \cdot \sin\alpha = w \cdot dt \cdot \sin\alpha$ und $d\vartheta = \omega dt$,

$$ED = p_3 \frac{dt^2}{2} = w\, dt \sin\alpha \cdot \omega\, dt = w \cdot \omega \cdot \sin\alpha \cdot dt^2.$$

Da nun diese Ablenkung in Folge der Drehung der Bahnlinie zu den vorstehend berechneten Ablenkungen $B_1 B$ und $C_1 C$ (Fig. 44) hinzukommt, so muss die gesammte Ablenkung die geometrische Summe von $B_1 B$, $C_1 C$ und ED sein; mithin wird die wahre

Beschleunigung p des Punktes die geometrische Summe der drei Beschleunigungen p_1, p_2 und p_3 oder

3) $$p \equiv p_1, \quad p_2, \, p_3,$$

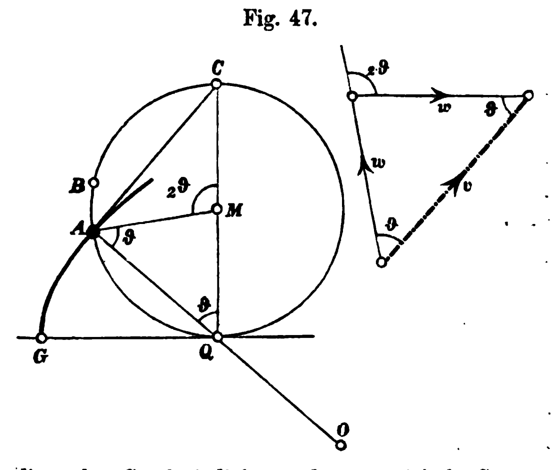
von denen die dritte den Werth hat

4) $$p_3 = 2\, w \cdot \omega \cdot \sin \alpha.$$

Daher der Satz: Die Beschleunigung eines Punktes, der sich in Bezug auf eine Bahnlinie scheinbar (relativ) bewegt, ist die geometrische Summe von drei Beschleunigungen: 1. der Beschleunigung p_1 der scheinbaren Bewegung; 2. der Beschleunigung p_2, mit welcher sich der Anfangspunkt A des Theilchens AB der beweglichen Bahnlinie bewegt; 3. einer Beschleunigung $p_3 = 2 \cdot w \cdot \omega \cdot \sin \alpha$, worin w die Geschwindigkeit der scheinbaren Bewegung, ω die Winkelgeschwindigkeit der Bahnlinie um die augenblickliche Drehachse, α der Winkel, den das Theilchen der scheinbaren Bahnlinie mit ihrer augenblicklichen Drehachse bildet; Richtung und Sinn dieser Beschleunigung p_3 stimmen überein mit Richtung und Sinn der Drehung des Endpunktes B des Bahntheilchens AB um seine augenblickliche Drehachse.

Beispiel 1: Die Rollbewegung des Kreises, bei welcher ein Punkt A desselben eine Cykloide GA (Fig. 47) beschreibt, kann zerlegt werden in eine Drehung um M mit der Umfangsgeschwindigkeit w und eine gleichzeitige Verschiebung, parallel der Geraden GQ mit derselben Geschwindigkeit w. Man kann sich also vorstellen, dass der beschreibende Punkt sich in dem Kreise von A nach B bewegt, während diese Bahnlinie sich wagerecht verschiebt. Es ist hiernach die wahre Geschwindigkeit v die geometrische Summe

Fig. 47.



aus der scheinbaren Geschwindigkeit w in der Richtung AB und der wagerechten Verschiebungsgeschwindigkeit w nach rechts. Bildet die scheinbare Geschwindigkeit w mit der Wagerechten den Winkel 2ϑ, so schliesst v mit der Wagerechten den Winkel ϑ ein und hat die Grösse

5) $$v = 2\,w \cos\vartheta.$$

Es ist in diesem Falle p_1 die Centripetalbeschleunigung $w^2 : r$; $p_2 = 0$, weil die Verschiebung der scheinbaren Kreisbahn gleichförmig und geradlinig erfolgt; p_3 ebenfalls $= 0$, weil die scheinbare Bahnlinie nur eine Verschiebung, aber keine Verdrehung erleidet, also $\omega = 0$ ist. Hiernach ist die wahre Beschleunigung p gleichbedeutend mit der Centripetalbeschleunigung $p_1 = w^2 : r$ und rechtwinklig zu AB, d. h. von A nach M gerichtet. Zerlegt man diese Beschleunigung p der Cykloidenbewegung in Tangential- und Normalbeschleunigung, so wird letztere, weil nach S. 20 die Normale zur Cykloide die Richtung AQ hat und mit AM den Winkel ϑ bildet, $p_n = \frac{w^2}{r}\cos\vartheta$. Ist aber ρ der Krümmungshalbmesser der Cykloide, so muss auch $p_n = \frac{v^2}{\rho}$ sein. Hiernach kann man den Krümmungshalbmesser ρ berechnen:

$$\rho = \frac{r\,v^2}{w^2 \cos\vartheta},$$

also nach Gl. 5 $\quad \rho = r \cdot 4 \cos\vartheta = 2 \cdot 2\,r \cos\vartheta,$

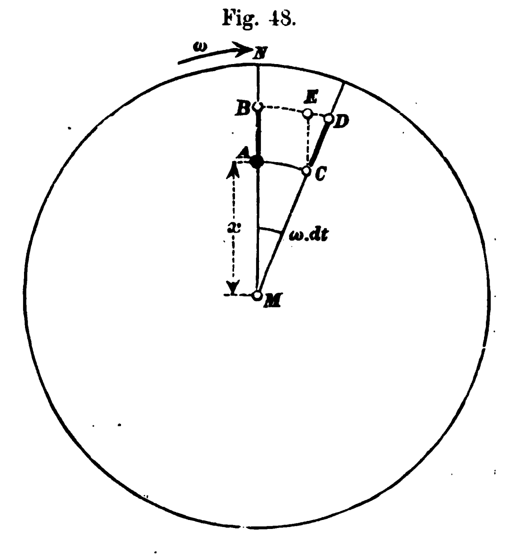
also, weil die Normale $\quad AQ = 2\,r\cos\vartheta$:

6) $$\rho = 2\ \text{Norm.},$$

d. h. der Krümmungshalbmesser OA gleich der doppelten Normalen AQ.

Beispiel 2: Auf dem Halbmesser MN einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω sich gleichförmig rechts herum drehenden Scheibe (Fig. 48) bewege sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit w gleichmässig nach aussen. Es sollen für den Augenblick, wo der Punkt sich bei A im Abstand x von der Mitte befindet, die Geschwindigkeit v und Beschleunigung p der wahren Bewegung bestimmt werden.

Fig. 48.



AB sei das Theilchen dx der scheinbaren Bahnlinie. Der Anfangspunkt A desselben hat eine Geschwindigkeit $x\omega$ nach rechts; setzt man diese (Fig. 49) mit w (aufwärts)

zusammen, so ergiebt sich v, u. zw. schliesst v mit dem Halbmesser einen Winkel γ ein, für den

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{x\,\omega}{w}.$$

Fig. 49.

Man hat sich im Sinne der Herleitung auf S. 39 den Übergang des Theilchens AB in die Nachbarlage CD (Fig. 48) in der Weise vorzustellen, dass man demselben eine Verschiebung um den Bogen AC in die Zwischenlage CE ertheilt denkt und nun um eine durch C gehende augenblickliche Drehachse, rechtwinklig zur Bildebene, eine Drehung von CE nach CD um den Winkel $\omega \cdot dt$ ausführt. In diesem Fall ist $p_1 = 0$, weil die scheinbare Bewegung ohne Beschleunigung erfolgt. Der Punkt A erfährt bei seiner Bewegung längs AC eine Centripetalbeschleunigung $p_2 = x \cdot \omega^2$; es ist, weil die Drehachse zur scheinbaren Bahnlinie rechtwinklig steht, in Gl. 4 $\alpha = 90^\circ$, daher $p_3 = 2\,w \cdot \omega$ mit dem Sinne rechtwinklig zu CE nach rechts, weil der Punkt E sich in diesem Sinne von E nach D bewegt. p (Fig. 49) schliesst mit dem Halbmesser einen Winkel β ein, für den

Fig. 50.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2\,w \cdot \omega}{x \cdot \omega^2} = \frac{2\,w}{x \cdot \omega}.$$

Verlängert man das Geschwindigkeitsdreieck (Fig. 49) um $FJ = w$ nach unten, so ist

$$\operatorname{tg} GHJ = \frac{2\,w}{x \cdot \omega} = \operatorname{tg} \beta,$$

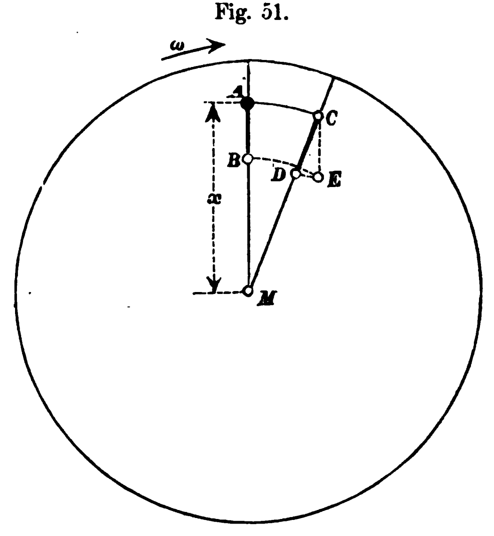


Fig. 51.

mithin ist p rechtwinklig zu HJ. Die wahre Bewegung des Punktes erfolgt bekanntlich in einer archimedischen Spirale (Fig. 50); die Beschleunigung p lässt sich zerlegen in eine Centripetalbeschleunigung p_n nach dem Krümmungsmittelpunkte der Spirale und eine Tangentialbeschleunigung p_t, die offenbar nach aussen gerichtet sein muss, weil die Geschwindigkeit v mit wachsendem x zunimmt.

Beispiel 3: Die scheinbare Bahnlinie sei ebenfalls ein Halbmesser einer sich gleichmässig drehenden Scheibe; die scheinbare Bewegung erfolge aber nicht nach aussen, sondern nach der Mitte hin (Fig. 51) mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit w. Man findet v mittels Fig. 52. Es ist wiederum $p_1 = 0$; $p_2 = x\,\omega^2$ centripetal; $p_3 = 2\,w \cdot \omega$ aber nach links gerichtet, weil

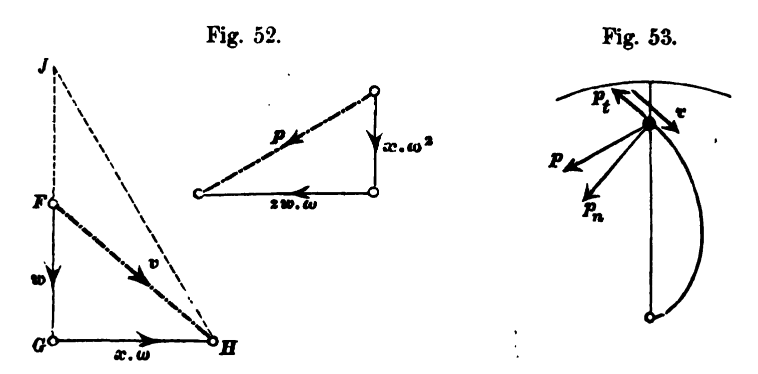


Fig. 52. Fig. 53.

sich bei der Drehung um C der Endpunkt E von E nach D bewegt. Die Richtung von p wird wiederum rechtwinklig zu HJ in dem Geschwindigkeitsdreieck Fig. 52, an welches man $JF = w$ anreiht. Die Zerlegung von p liefert diesmal in tangentialer Richtung eine Verzögerung (Fig. 53), weil die Geschwindigkeit v mit kleiner werdendem x abnimmt. Die wahre Bahnlinie ist wiederum eine archimedische Spirale.

D. Scheinbare (relative) Bewegung.

In dem vorstehenden Abschnitte war schon von der scheinbaren Bewegung die Rede; dieselbe wurde als gegeben behandelt und mit der Bewegung der Bahnlinie zu der wahren Bewegung zusammengesetzt. In diesem Abschnitte handelt es sich aber um die Aufsuchung der scheinbaren Bewegung, während die wahre Bewegung gegeben sein soll. Wir gelangen dazu durch folgende Betrachtung.

Führt ein Körper in einem Raume, den wir als ein Achsenkreuz auffassen und bezeichen wollen, eine Bewegung aus, so lässt sich diese für jeden Augenblick als eine Schraubenbewegung

darstellen. Bewegt sich nun auch das Achsenkreuz gleichzeitig, so kann man auch dessen Bewegung für jeden Augenblick auf eine Schraubenbewegung zurückführen. Die erstgenannte Bewegung heisst die scheinbare oder relative Bewegung des Körpers in Bezug auf das Achsenkreuz, weil ein an der Bewegung des Achsenkreuzes theilnehmender Beobachter nur diese Bewegung mit seinen Sinnen wahrnehmen (sehen und fühlen) kann, wie z. B. die Bewegungen in einem fahrenden Eisenbahnwagen oder Schiffe, oder auch in einem Zimmer, welches doch an den verschiedenen Bewegungen der Erde theilnimmt. Durch die Zusammensetzung der beiden Schraubenbewegungen nach der S. 35 angedeuteten Weise erhält man die wahre Bewegung. Bezeichnen wir die scheinbare Bewegung mit B_{sch}, die Bewegung des Achsenkreuzes mit B_{achs}, die wahre Bewegung mit B_w, so gilt die Gleichwerthigkeit ($\equiv$)

$$1)\qquad B_{sch},\ B_{achs} \equiv B_w,$$

welche nur andeuten soll, dass die geometrische Summe von B_{sch} und B_{achs} auf der einen Seite des Zeichens $\equiv$ zu demselben Endergebnisse führt wie die Bewegungen auf der anderen Seite. Ertheilen wir nun sowohl dem Körper wie auch dem Achsenkreuze noch eine fernere, beliebige Bewegung B, so wird dadurch an dem gegenseitigen Verhalten des Körpers und des Achsenkreuzes, also auch an der scheinbaren Bewegung nichts geändert, man kann daher auch schreiben:

$$2)\qquad B_{sch},\ B_{achs},\ B \equiv B_w,\ B.$$

Wählt man nun diese neue Bewegung so, dass sie das Entgegengesetzte der Bewegung des Achsenkreuzes ist, d. h. für jeden Augenblick eine Schraubenbewegung um dieselbe Achse mit gleichen aber entgegengesetzten Geschwindigkeiten der Drehung und Verschiebung, was wir durch

$$3)\qquad B \equiv -B_{achs}$$

ausdrücken wollen, so heben sich B_{achs} und B vollständig auf, und es wird aus Gl. 2:

$$4)\qquad B_{sch} \equiv B_w,\ (-B_{achs});$$

d. h. die scheinbare Bewegung eines Körpers in Bezug auf ein bewegliches Achsenkreuz ist in jedem

Augenblicke die geometrische Summe aus der wahren Bewegung des Körpers und dem Entgegengesetzten der Bewegung des Achsenkreuzes.

I. Scheinbare Bewegung eines Punktes in Bezug auf einen anderen.

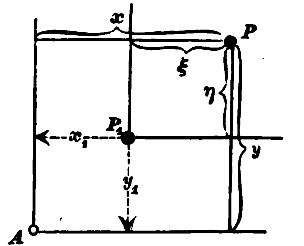
Wir denken uns durch den zweiten Punkt P_1 ein Achsenkreuz gelegt, welches, da ein Punkt eine Drehbewegung nicht hat, nur eine Parallelverschiebung mit dem Punkte P_1 ausführt. Die Bewegung des ersten Punktes P gegen dieses Achsenkreuz ist dann die gesuchte scheinbare Bewegung, während seine wahre Bewegung auf ein zu obigem paralleles festes Achsenkreuz mit dem Anfangspunkt A bezogen wird. Die scheinbare Bewegung von P gegen P_1 ist die geometrische Summe der wahren Bewegung von P und dem Entgegengesetzten der Verschiebung von P_1; die scheinbare Geschwindigkeit w ist die geometrische Summe aus der wahren Geschwindigkeit v und dem Entgegengesetzten der Geschwindigkeit u des Punktes P_1, d. h.

$$w \equiv v, (-u);$$

ebenso ist die scheinbare Beschleunigung p_1 die geometrische Summe aus der wahren Beschleunigung p und dem Entgegengesetzten der Beschleunigung p_2 des Punktes P, d. h.

$$p_1 \equiv p, (-p_2).$$

Fig. 54.



(p_3 kommt hier noch nicht in Frage, weil das bewegliche Achsenkreuz keine Drehung ausführt, also in Gl. 4, S. 40 $\omega = 0$ ist.)

Hat der Punkt P in Bezug auf ein festes Achsenkreuz die Koordinaten x, y, z, der Punkt P_1 in Bezug auf dasselbe Achsenkreuz die Koordinaten x_1, y_1, z_1, so gilt für die (scheinbaren) Koordinaten ξ, η, ζ des Punktes P in Bezug auf das mit P_1 bewegliche Achsenkreuz

$$\xi = x - x_1; \quad \eta = y - y_1; \quad \zeta = z - z_1.$$

Fig. 54 zeigt den Fall, wo die Bewegungen nur in einer Ebene vor sich gehen. Dann kann man auch schreiben:

$$w_x = v_x - u_x \quad \text{oder} \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt},$$

$$w_y = v_y - u_y \quad \text{oder} \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}$$

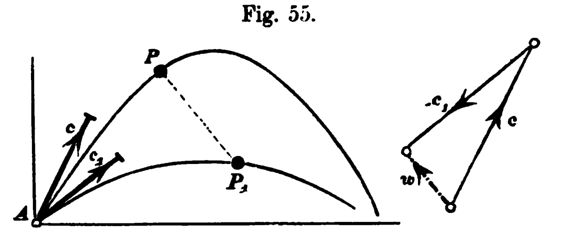
und ebenso für die Beschleunigungen

$$p_{1x} = p_x - p_{2x} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x_1}{dt^2},$$

$$p_{2y} = p_y - p_{2y} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2y_1}{dt^2}.$$

Beispiel 1: In derselben lothrechten Ebene werden (Fig. 55) gleichzeitig zwei Punkte P und P_1 mit den Geschwindigkeiten c und c_1 unter den Neigungswinkeln α und α_1 fortgeworfen; welches ist die scheinbare Bewegung von P in Bezug auf P_1 (wenn man sich vorstellt, dass ein Beobachter [wie Münchhausen auf der Kanonenkugel] die Bewegung von P_1 mitmacht). Auf die Punkte soll nur die Schwere, kein Luftwiderstand wirken. Dann ist nach dem 1. Theile, S. 49

Fig. 55.



$$x = c\cos\alpha\, t; \qquad x_1 = c_1\cos\alpha_1\, t;$$

$$y = c\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}; \qquad y_1 = c_1\sin\alpha_1\, t - \frac{gt^2}{2}.$$

Daher

$$\xi = (c\cos\alpha - c_1\cos\alpha_1)\,t,$$

$$\eta = (c\sin\alpha - c_1\sin\alpha_1)\,t,$$

$$w_x = c\cos\alpha - c_1\cos\alpha_1,$$

$$w_y = c\sin\alpha - c_1\sin\alpha_1,$$

also offenbar

$$w \equiv c,\ (-c_1);\ p_1 = 0,$$

d. h. die scheinbare Bewegung erfolgt gleichförmig und geradlinig mit der Geschwindigkeit w.

Es ergiebt sich dies noch einfacher, wenn man die Wurfbewegungen zerlegt in die gleichförmig geradlinigen ct bezw. c_1t nach den Richtungen der Anfangsgeschwindigkeiten, und die lothrecht abwärts gerichteten $\frac{1}{2}gt^2$ bezw. $\frac{1}{2}gt^2$. Da die beschleunigten Fallbewegungen beiden Punkten gemeinsam sind, so kann die scheinbare Bewegung nur von den beschleunigungslosen Bewegungen ct und c_1t abhängig sein.

Beispiel 2: Zwei Punkte P und P_1 durchlaufen mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten zwei Kreise mit gemeinsamem Mittelpunkt A (Fig. 56). Die scheinbare Bewegung von P in Bezug auf P_1 soll untersucht werden.

Es seien r und r_1 die Halbmesser AP und AP_1 der Kreise, α der Winkel, den die gleichzeitigen Fahrstrahlen r und r_1 mit einander bilden, ϑ der veränderliche Neigungswinkel von AP gegen die AX; dann ist

$$x = r \cos \vartheta; \qquad y = r \sin \vartheta;$$

$$x_1 = r_1 \cos(\alpha + \vartheta); \quad y_1 = r_1 \sin(\alpha + \vartheta);$$

$$\xi = x - x_1 = r \cos \vartheta - r_1 \cos(\alpha + \vartheta);$$

$$\eta = y - y_1 = r \sin \vartheta - r_1 \sin(\alpha + \vartheta).$$

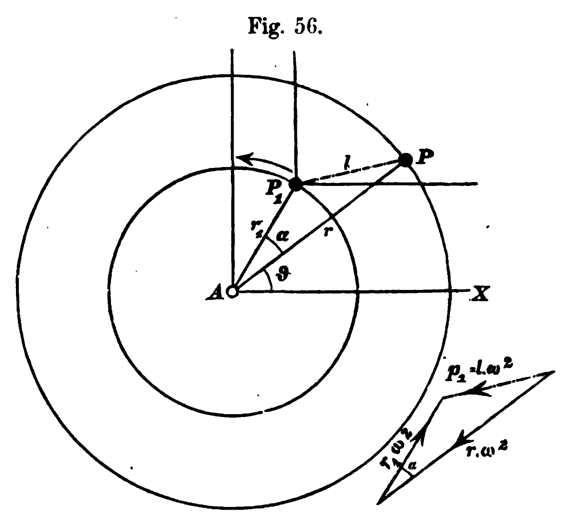
Bildet man hiernach $\xi^2 + \eta^2$, so erhält man dafür

$$r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos \alpha = l^2 = \overline{PP_1}^2,$$

was übrigens auch schon daraus folgt, dass wegen gleicher Winkelgeschwindigkeit beider Punkte das Dreieck APP_1 seine Form unverändert behält, während es sich um A dreht. Die scheinbare Bewegung von P in Bezug auf P_1 ist also eine Bewegung in einem Kreise vom Halbmesser

$$l = PP_1.$$

Fig. 56.



Die wahre Beschleunigung von P ist $p = r \cdot \omega^2$ in der Richtung von P nach A; die Beschleunigung

$$p_2 = r_1 \omega^2$$

hat die Richtung von P_1 nach A, daher ist $-p_2$ von A nach P_1 gerichtet. (S. das Beschleunigungsdreieck in Fig. 55, rechts.) Da nun p und p_2 mit r und r_1 verhältnisgleich sind, auch den Winkel α mit einander bilden, so wird das aus ihnen gezeichnete Dreieck ähnlich mit PAP_1, daher die geometrische Summe $p_1 = l \cdot \omega^2$ und mit PP_1 parallel. Die scheinbare Bewegung in einem Kreise vom Halbmesser l erfolgt also mit überall gleicher Beschleunigung. Daher ist die scheinbare Bewegung eine gleichförmige Kreisbewegung mit der Umfangsgeschwindigkeit $w = l \cdot \omega$, der Winkelgeschwindigkeit ω.

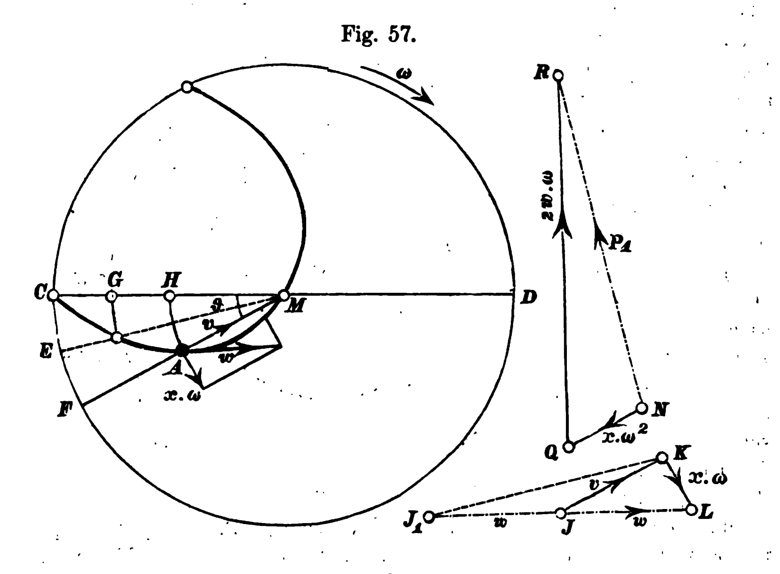
2. Scheinbare Bewegung in Bezug auf einen beliebig bewegten Raum.

In diesem Falle sind u und p_2 selbstverständlich Geschwindigkeit und Beschleunigung derjenigen Stelle des bewegten Raumes, an dem der Punkt oder Körper sich gerade befindet. Da ferner nach Gl. 3, S. 40 $p \equiv p_1, p_2, p_3$, so wird hieraus

$$1) \qquad p_1 \equiv p, (-p_2), (-p_3).$$

Beispiel 1: Eine wagerechte Scheibe (Fig. 57) drehe sich gleichförmig rechts herum mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre lothrechte Achse; oberhalb derselben führe ein Punkt eine gleichmässige Bewegung längs einer wagerechten Geraden aus, die durch den Mittelpunkt der Scheibe geht. Diese wirkliche Bewegung erfolge mit der Geschwindigkeit v. Es soll die scheinbare Bewegung in Bezug auf die Scheibe bestimmt werden. Man stelle sich etwa vor, dass die Kante eines gegen die Scheibe erhöht liegenden Lineals die wirkliche Bahnlinie des Punktes, und dass der Punkt die Spitze eines Bleistiftes sei, den man gleichmässig an dem Lineale entlang bewegt, während die darunter

Fig. 57.



befindliche Scheibe sich gleichmässig dreht; dann zeichnet der Bleistift die scheinbare Bahnlinie auf. Ist C der Anfangspunkt der Bewegung, so erhält man leicht eine Anzahl von Punkten der scheinbaren Bahnlinie, indem man, von C beginnend, links herum den Winkel $\omega = CME = EMF$ u. s. f. hintereinander aufträgt und ebenso die Längen $v = CG = GH$ u. s. f. auf der

Geraden CMD abmisst. Schneidet ein durch B gelegter Kreisbogen mit dem Mittelpunkt M den Halbmesser MF in A, so ist A ein Punkt der scheinbaren Bahnlinie. Denn es muss der Geraden CMD, auf der sich der Punkt bewegt, eine Drehung um M ertheilt werden, welche der wahren Drehung der Scheibe gleich und entgegengesetzt ist.

Setzt man $\sphericalangle CMA = \vartheta$, $MA = x$, $CM = r$, so ist

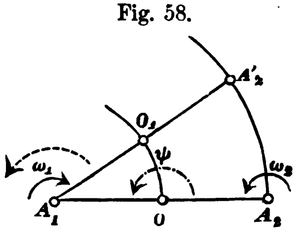
$$r - x = vt; \quad \vartheta = \omega t;$$

daraus entsteht
$$x = r - \frac{v}{\omega}\vartheta;$$

diese Gleichung bedeutet, weil die Beziehung zwischen x und ϑ linear ist, eine archimedische Spirale. Die scheinbare Geschwindigkeit w im Punkt A ist die Diagonale eines Rechtecks aus v in der Richtung AM und dem dazu rechtwinkligen $x\omega$. — Zur Bestimmung der scheinbaren Beschleunigung ist zu bedenken, dass $p = 0$, weil die wahre Bewegung gleichförmig erfolgt; daher muss $p_1 \equiv (-p_2), (-p_3)$ sein. Es bedeutet darin $-p_2$ die Centrifugalbeschleunigung $x \cdot \omega^2$, in der Richtung MA, d. h. rechtwinklig zu $KL = x \cdot \omega$ (Fig. 57, rechts unten) aufgetragen. Es ist $p_3 = 2 w \cdot \omega$, weil $\alpha = 90^0$ ist. Richtung und Sinn von p_3 stimmt überein mit der Bewegung des Endpunkts von $w \cdot dt$, also auch von w bei einer Drehung um A mit der Winkelgeschwindigkeit ω der Scheibe, d. h. rechts herum. Daher ist $+p_3$ rechtwinklig zu w nach unten, $-p_3$ also nach oben gerichtet. Hiermit ist p_1 bestimmt. Verlängert man in dem Geschwindigkeitsdreieck (Fig. 57, rechts unten) LJ nach links um $JJ_1 = w$ und zieht J_1K, so ist $\triangle J_1KL \sim \triangle RNQ$, denn es ist $QN \perp KL$; $RQ \perp LJ_1$, mithin $\sphericalangle NQR = \sphericalangle KLJ_1$ und ausserdem $\overline{NQ} = \omega \cdot \overline{KL}$, $\overline{QR} = \omega \cdot \overline{LJ_1}$; daher wird $p_1 \perp J_1K$ und $p_1 = \omega \cdot \overline{J_1K}$. Es weicht p_1 von seiner normalen Seitenbeschleunigung p_n ($\perp w$) nach links ab, d. h. die scheinbare Bewegung geschieht mit tangentialer Verzögerung, wie es sein muss, da $x\omega$ bei Annäherung an die Mitte kleiner wird, mithin w abnehmen muss.

Beispiel 2: Zwei Körper K_1 und K_2 drehen sich um Parallelachsen A_1 und A_2 (Fig. 58) mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 entgegengesetzten Sinnes. Es soll die scheinbare Bewegung von K_2 in Bezug auf K_1 gesucht werden. Zu diesem Zwecke hat man K_2 ausser seiner Drehung ω_2 noch eine Drehung ω_1, entgegengesetzt der Bewegung von K_1, d. h. mit ω_2 gleichen Sinnes, zu ertheilen, wie bei A_1 punktirt angegeben. Diese beiden Drehungen um A_1 und A_2 lassen sich nach S. 31 für jeden Augenblick vertauschen mit einer Drehung um eine Achse $O \parallel A_1$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\psi = \omega_1 + \omega_2$, u. zw. ist

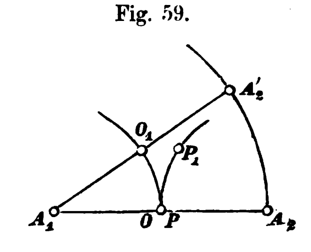
Fig. 58.



$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Nach der Zeit t hat die Achse A_2 sich in ihrer scheinbaren Bewegung nach A_2' bewegt, wenn $A_2 A_1 A_2' = \omega_1 t$ ist. Dann liegt, wenn ω_1 und ω_2 sich nicht ändern, die augenblickliche Drehachse bei O_1. Der Cylinder $O O_1$ mit der Achse A_1 und dem Halbmesser $A_1 O$ ist der Ort der augenblicklichen Drehachsen, und da O auch von A_2 einen unveränderlichen Abstand hat, so ist ein mit dem Körper K_2 verbundener Cylinder $P P_1$ (Fig. 59) der Ort derjenigen Geraden des Körpers K_2, welche der Reihe nach mit den augenblicklichen Drehachsen O, O_1 . . . zusammenfallen. Die scheinbare Bewegung von K_2 in Bezug auf K_1 ist nach S. 19 ein Rollen des Cylinders $P P_1$ auf dem Cylinder $O O_1$. Sind diese Cylinderflächen an den Körpern thatsächlich vorhanden, so haben sie an der Berührungsstelle stets die Gleitgeschwindigkeit Null. Es beruht auf diesem Verhalten die Lehre von der Verzahnung der Zahnräder.

Fig. 59.



Zweite Abtheilung.

Mechanik des Massenpunktes.

A. Geradlinige Bewegung des Massenpunktes.

Nach 1. Theil, S. 32 ertheilt eine Kraft K einem Massenpunkt m die Beschleunigung

$$p = \frac{K}{m}$$

in der Richtung und im Sinne der Kraft K. Da bei geradliniger Bewegung nach S. 2 die Richtung der Beschleunigung mit der Richtung der Geschwindigkeit zusammenfällt, so muss auch die Richtung der wirkenden Kraft stets mit der Richtung der Geschwindigkeit übereinstimmen, damit eine geradlinige Bewegung entstehe.

Wir betrachten hier im Wesentlichen Bewegungen unter Wirkung veränderlicher Kräfte. Um aus der gegebenen Kraft und der daraus unmittelbar bestimmten Beschleunigung p die Geschwindigkeit v und den Abstand x des Massenpunktes von einem Festpunkt A seiner Bahnlinie zu finden, müssen Integrationen ausgeführt werden. Der einzuschlagende Weg der Rechnung ist abhängig von der Art der Veränderlichkeit der gegebenen Kraft.

1. Ist K eine Funktion der Zeit, also $K : m = p = F(t)$, so wird nach S. 2

$$dv = p \cdot dt = F(t) \cdot dt \quad \text{und}$$

$$v = \int F(t) \cdot dt + C, \quad \text{wofür}$$

$$v = \varphi(t)$$

geschrieben werden möge.

Daraus folgt weiter nach S. 1

$$dx = v \cdot dt = \varphi(t) \cdot dt \quad \text{und}$$
$$x = \int \varphi(t)\, dt + C_1, \quad \text{oder}$$
$$x = f(t)$$

als gesuchtes Bewegungsgesetz.

2. Ist K eine Funktion des Ortes des Massenpunktes, also

$$K : m = p = F(x), \quad \text{so wird}$$
$$dv = p \cdot dt = F(x) \cdot dt.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \text{so entsteht}$$
$$v\,dv = F(x) \cdot dx \quad \text{und}$$
$$v^2 = 2\int F(x) \cdot dx + C \quad \text{oder}$$
$$v = \varphi(x). \quad \text{Daraus folgt weiter}$$
$$dx = v \cdot dt = \varphi(x) \cdot dt.$$

In dieser Gleichung muss man behufs der Integration die Veränderlichen trennen, d. h. alles mit x behaftete auf einer Seite vereinigen. Dann wird

$$dt = \frac{dx}{\varphi(x)} \quad \text{und}$$
$$t = \int \frac{dx}{\varphi(x)} + C = \psi(x),$$

hiermit hat man t als Funktion von x, woraus in vielen Fällen

$$x = f(t)$$

als Bewegungsgesetz entwickelt werden kann.

3. Ist die Kraft K eine Funktion der Geschwindigkeit, also

$$K : m = p = F(v), \quad \text{so wird}$$
$$dv = p \cdot dt = F(v) \cdot dt$$

und nach Trennung der Veränderlichen

$$dt = \frac{dv}{F(v)}.$$

Daraus

$$t = \int \frac{dv}{F(v)} + C = \varphi(v).$$

Die Entwickelung dieser Gleichung nach v liefert $v = \psi(t)$. Dann wird

$$dx = v \cdot dt = \psi(t) \cdot dt,$$

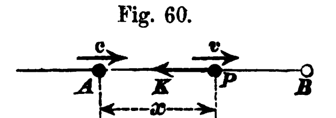
woraus sich $x = \int \psi(t) \cdot dt + C_1 = f(t)$ ergiebt.

Die folgenden Untersuchungen liefern Beispiele zu diesen allgemeinen Andeutungen. Der Fall, dass die Kraft als Funktion der Zeit gegeben sei, ist ausserordentlich einfach, kommt aber in der Anwendung kaum vor. Daher gehen wir sogleich zu einem Falle der zweiten Art über.

I. Geradlinige Schwingung eines Massenpunktes.

Ein Massenpunkt m stehe unter Einwirkung einer von einem festen Punkt A ausgehenden Anziehungskraft, welche stets das Bestreben hat, ihn nach A hinzuziehen (Fig. 60). Diese Anziehungskraft K sei verhältnisgleich mit dem Abstand x des Massenpunktes m von dem Festpunkt A. Befindet sich der Massenpunkt in A, so hat die Kraft den Werth Null, es ist daher A die Gleichgewichtslage des Massenpunktes. In ihr befinde sich der Massenpunkt zu Anfang, erfahre nun aber, etwa durch einen Stoss, eine Anfangsgeschwindigkeit c, die ihn aus der Gleichgewichtslage A entfernt. Dann wirkt auf ihn in derselben Richtung, aber in entgegengesetztem Sinne, die Kraft K, so dass die Bewegung eine geradlinige werden muss. Da K mit x verhältnisgleich ist, so kann man die Beschleunigung setzen

Fig. 60.



$$p = -\frac{K}{m} = -k^2 x. \tag{1}$$

Dann bedeutet k^2 die absolute Grösse der Beschleunigung im Abstande $= 1$ von der Gleichgewichtslage, und man erhält

$$\frac{dv}{dt} = -k^2 \cdot x; \tag{2}$$

multiplicirt man mit $v\,dt = dx$, so wird

$$v\,dv = -k^2 x\,dx, \quad \text{also}$$

$$v^2 = -k^2 x^2 + C$$

und weil $v = c$ war, für $x = 0$:

$$v = \sqrt{c^2 - k^2 x^2}. \tag{3}$$

Setzt man nun $v = \frac{dx}{dt}$, so wird

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{c^2 - k^2 x^2}} = \frac{1}{k}\,\frac{dx}{\sqrt{\frac{c^2}{k^2} - x^2}} = \frac{1}{k}\,\frac{d\left(\frac{k}{c}\,x\right)}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}\,x^2}};$$

dies giebt

$$t = \frac{1}{k} \arcsin \frac{kx}{c} + C_1 \tag{4}$$

(mit $C_1 = 0$, weil $x = 0$ für $t = 0$). Hiernach ist

$$x = \frac{c}{k} \sin kt \tag{5}$$

die Bewegungsgleichung, aus der noch die Geschwindigkeitsgleichung

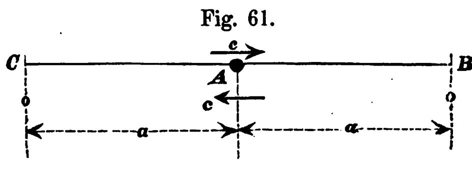
$$v = \frac{dx}{dt} = c \cdot \cos kt \quad \text{entsteht.} \tag{6}$$

Für	$t = 0$	$\frac{\pi}{2k}$	$\frac{\pi}{k}$	$\frac{3}{2}\frac{\pi}{k}$	$\frac{2\pi}{k}$	
wird	$x = 0$	$\frac{c}{k}$	0	$-\frac{c}{k}$	0	
und	$v = c$	0	$-c$	0	c	
(Punkt	A	B	A	C	A	Fig. 61).

$$x = \frac{c}{k} \quad \text{und} \quad x = -\frac{c}{k}$$

sind grösste und kleinste Werthe von x; nach einer Zunahme der Zeit um je $\frac{2\pi}{k}$, d. h. nach einer Zunahme der Grösse kt um je 2π kehren in den periodischen Funktionen der Gl. 5 und 6 stets die gleichen Werthe wieder.

Fig. 61.



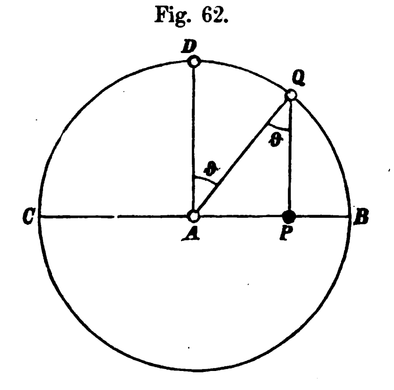
Während der Zeit $\frac{2\pi}{k}$ wird die Bahnlinie BC von dem Massenpunkte hin und her durchlaufen. Eine solche Bewegung nennt man eine Schwingungsbewegung. Der Massenpunkt schwingt um die Gleichgewichtslage als Mitte; es ist $\frac{2\pi}{k}$ die Zeit einer Doppelschwingung,

$$t_1 = \frac{\pi}{k} \tag{7}$$

die Dauer einer einfachen Schwingung.

Die Schwingungsdauer ist nach Gl. 7 nur von der Beschleunigungsgrösse k^2 (im Abstande gleich Eins) abhängig; die Geschwindigkeit c, mit welcher der Massenpunkt durch die Gleichgewichtslage geht, beeinflusst nur die halbe Schwingungsweite a; diese wird für $t = \frac{\pi}{2k}$ nach Gl. 5

Fig. 62.



$$a = \frac{c}{k}. \tag{8}$$

Solche Schwingungsbewegung kann man sehr einfach zur Darstellung bringen, wenn man einen Punkt mit gleichbleibender Geschwindigkeit c in einem Kreisumfange vom Halbmesser $a = c : k$ führt und diese Bewegung auf einen Durchmesser projicirt. Beginnt die Bewegung in D, so ist $DQ = ct$, daher

$$\measuredangle\, DAQ = \measuredangle\, AQP = ct : a = kt,$$

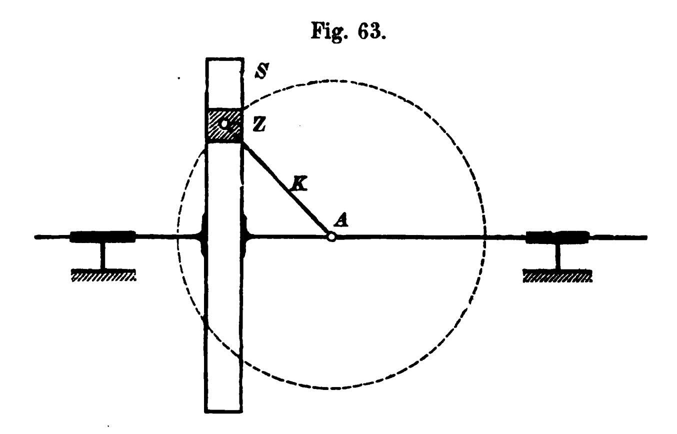
$$AP = x = a \sin kt,$$

d. h. mit Gl. 5 übereinstimmend.

Eine solche Projektionsbewegung einer Kreisbewegung kommt vor bei der **Kurbelschleife** (Fig. 63). Dreht sich die Kurbel K gleichmässig um die Achse A, so gleitet der auf den Kurbelzapfen Z

gesteckte würfelförmige „Stein“ in dem Schlitze der wagerecht geführten Kurbelschleife S und überträgt auf sie nur die wagerechte

Fig. 63.



Seitenbewegung des Kurbelzapfens. Die Bewegung der Schleife erfolgt daher nach der Gleichung

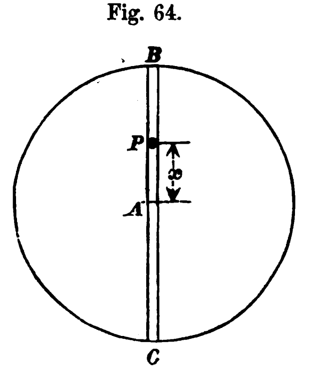
$$9) \qquad x = a \cdot \sin kt = a \cdot \sin \frac{c \cdot t}{a},$$

wenn a der Kurbelhalbmesser, c die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens ist.

Beispiel 1: Stellt man sich vor, durch die Erde, deren Dichte überall gleich angenommen werden soll, sei längs eines Durchmessers eine Röhre geführt (Fig. 64), so erfährt ein in der Röhre befindlicher Massenpunkt bei einem Abstand x vom Erdmittelpunkt A nach 1. Theil, S. 58, Gl. 7, eine Fallbeschleunigung

$$g_x = g \frac{x}{r},$$

Fig. 64.



wenn r der Erdhalbmesser und g die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche ist. Da die nach dem Punkt A gerichtete Anziehungskraft mit x verhältnisgleich, so ist die Bedingung der Schwingung nach Gl. 5 erfüllt. Für $x = 1$ wird

$$g_x = \frac{g}{r} = k^2, \quad \text{daher ist}$$

$$10) \qquad k = \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Hatte nun der Massenpunkt an der Stelle B die Geschwindigkeit Null, so ist nach Gl. 8

$$AB = r = a = \frac{c}{k} = c\sqrt{\frac{r}{g}}$$

die halbe Schwingungsweite, woraus

$$c = \sqrt{g\,r} \tag{11}$$

folgt als Geschwindigkeit, mit welcher der Massenpunkt die Gleichgewichtslage A durchläuft. Der Massenpunkt langt bei C mit der Geschwindigkeit Null an, kehrt nach B zurück und wiederholt diese Bewegungen fortgesetzt. Das einmalige Durchlaufen des Durchmessers erfordert die Zeit

$$t_1 = \frac{\pi}{k} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}; \tag{12}$$

es ist dies die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels von der Schwingungslänge r (Erdhalbmesser) bei kleiner Schwingungsweite (s. 1. Theil, S. 78).

Mit $r = 6\,370\,000^{\mathrm{m}}$ und $g = 9{,}81\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s.}^2}$ wird

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{6\,370\,000}{9{,}81}} = 2532^{\mathrm{s.}} = 42{,}2^{\mathrm{min.}};$$

$$c = \sqrt{9{,}81 \cdot 6\,370\,000} = 7905\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s.}}$$

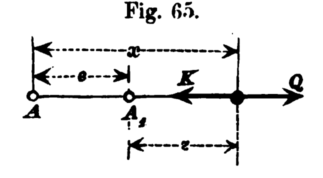
Würde man einen zweiten Punkt mit dieser Geschwindigkeit um die Erde führen, so würde er stets in derselben Zeit in B und C eintreffen wie der erste, den Durchmesser BC durchschwingende Punkt. Übrigens braucht dieser zweite Punkt nicht einmal geführt zu werden, vielmehr wird er, bei B mit der wagerechten Geschwindigkeit $c = \sqrt{g\,r}$ versehen, wenn kein Luftwiderstand auftritt, die Erde frei umkreisen, ohne einen Druck auf die Erde auszuüben, weil die Schwere mg allein zur Centripetalbeschleunigung

$$p_n = \frac{c^2}{r} = \frac{g\,r}{r} = g.$$

verbraucht wird.

Hinzutreten einer unveränderlichen Kraft. In den meisten Fällen, wo Schwingungsbewegungen auftreten, wirkt ausser der veränderlichen Kraft K noch eine unveränderliche Kraft Q, gewöhnlich das Gewicht des Massenpunktes. Es lässt sich zeigen, dass deren Hinzukommen die Grundeigenschaften der Bewegung nicht erheblich ändert.

Fig. 65.



Ist (Fig. 65) A der Ausgangspunkt (Nullpunkt) der veränderlichen Kraft $K = m \cdot k^2 \cdot x$, von welchem aus x gemessen wird, und tritt nun vielleicht in entgegengesetztem

Sinne die Kraft Q hinzu, so wird die Mittelkraft $= m \cdot k^2 x - Q$. Diese wird Null für

13) $$x = \frac{Q}{m k^2} = e = A A_1,$$

d. h. die Stelle A_1 ist jetzt die Gleichgewichtslage. Nennt man $z = x - e$ den Abstand des Massenpunktes von A_1, so wird unter Einsetzung von $x = z + e$ die Mittelkraft nunmehr

$$m \cdot k^2(z + e) - Q = m \cdot k^2(z + e) - m \cdot k^2 e = m \cdot k^2 z,$$

weil nach Gl. 13 $Q = m k^2 e$ ist. Diese Mittelkraft ist nach der Gleichgewichtslage gerichtet und ertheilt dem Massenpunkt eine Beschleunigung

14) $$p = - k^2 z$$

im Sinne des wachsenden z. Hierin bedeutet k^2 die absolute Beschleunigungsgrösse im Abstande $= 1$ von der Gleichgewichtslage. Die Vergleichung mit Gl. 1 (S. 53) zeigt nur eine Vertauschung des Buchstaben x mit z; beide bedeuten aber den Abstand des Massenpunktes von der Gleichgewichtslage. Bezeichnet daher wieder

c die Geschwindigkeit in der Gleichgewichtslage,

a die halbe Schwingungsweite,

t_1 die Dauer einer einfachen Schwingung,

so gilt nach Gl. 7 u. 8:

15) $$t_1 = \frac{\pi}{k}; \quad a = \frac{c}{k}; \quad c = k a.$$

Ist die unveränderliche Kraft Q die Schwerkraft mg, so wird nach Gl. 13

16) $$e = \frac{g}{k^2}, \quad \text{also} \quad k^2 = \frac{g}{e}, \quad \text{mithin}$$

17) $$t_1 = \pi \sqrt{\frac{e}{g}}; \quad a = c \sqrt{\frac{e}{g}}; \quad c = a \sqrt{\frac{g}{e}},$$

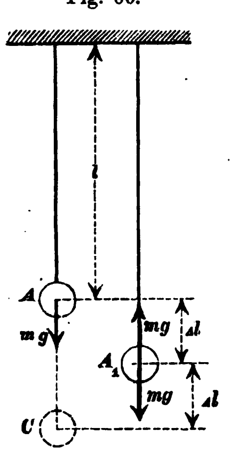
d. h. die Dauer einer Schwingung ist nun gleich derjenigen eines mathematischen Pendels von der Länge $e =$ dem Abstande der Gleichgewichtslage von dem Nullpunkte der veränderlichen Kraft $=$ der Verschiebung der Gleichgewichtslage in Folge des Hinzutretens der Kraft $Q = mg$.

Vorstehende Entwickelungen finden auf die meisten elastischen (Feder-) Schwingungen Anwendung, wenn man die eigene Masse des elastischen Körpers gegenüber der angehängten Masse vernachlässsigen darf.

a) Schwingungen in Folge elastischer Aufhängung.

Hängt an einer lothrechten elastischen Stange (Fig. 66) vom Querschnitt F, der Länge l in (spannungslosem Zustande) und dem Elasticitätsmafs E eine Masse m, so bewirkt deren Gewicht mg eine Gleichgewichtsverlängerung

Fig. 66.



$$\Delta l = \frac{l}{E} \frac{mg}{F}$$

(2. Theil, S. 5), während eine Verlängerung um x, verbunden mit einer gleichen Verschiebung des Punktes m aus der Lage A nach unten eine Spannkraft

$$K = \frac{EF}{l} x$$

hervorbringt. Die Kraft K entspricht also der Gl. 1 (S. 53); es ist A der Nullpunkt der veränderlichen Kraft. Für $x = \Delta l$ heben sich K und mg auf, daher ist

18) $$e = \Delta l$$

die Verschiebung der Gleichgewichtslage A_1 des Punktes von dem Nullpunkt A der Spannkraft. Wird also der elastisch aufgehängte Punkt m etwa durch einen Stoss oder Schlag derartig in Bewegung gesetzt, dass er mit einer lothrechten Geschwindigkeit c durch die Gleichgewichtslage A_1 geht, so führt er Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus, deren Dauer gleich der eines Pendels von einer Schwingungslänge = der Gleichgewichtsverlängerung Δl; d. h.

19) $$t_1 = \pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}; \quad \text{ferner} \quad a = c\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}; \quad c = a\sqrt{\frac{g}{\Delta l}}.$$

Ob die Schwingungslänge $2a$ gross oder klein, hat auf t_1 keinen Einfluss, sofern nur die Gleichung für die Spannkraft

$K = \frac{E \cdot F}{l} x$ gültig bleibt; es darf also der Stab nicht über die Proportionalitätsgrenze verlängert werden; auch darf der Stab bei der Aufwärtsbewegung sich nicht ausbiegen. Solange die halbe Schwingungsweite $a \leq \Delta l$ ist, wird der Stab nur Zugkräfte auszuhalten haben. Ist aber gerade $a = \Delta l$, so fällt die höchste Lage des Punktes m mit A zusammen, wobei der Stab eben spannungslos wird.

Dieser Fall tritt ein, wenn die Masse m mit der spannungslosen Stange verbunden und plötzlich losgelassen wird. Dann hat m zu Anfang die Geschwindigkeit Null, die Beschleunigung g nach unten. Es fällt die obere Grenzlage des Punktes mit A zusammen, während die andere Grenzlage C um $2a = 2 \cdot \Delta l$ tiefer liegt. Der Massenpunkt geht mit der Geschwindigkeit

20) $$c = \sqrt{\Delta l \cdot g}$$

durch die Gleichgewichtslage A_1. Die stärkste Verlängerung des Stabes beträgt $2 \cdot \Delta l$, d. h. das Doppelte der Gleichgewichtsverlängerung, die stärkste Spannung also auch das Doppelte derjenigen Spannung, welche entstehen würde, wenn die Masse m ruhend an der Stange hinge. (Vgl. 2. Theil, S. 106.)

Die Messung der Schwingungsdauer t_1 kann zur Bestimmung des Elasticitätsmafses E benutzt werden. Denn es ist (Gl. 19)

$$\Delta l = \frac{l}{E} \frac{mg}{F} = g \frac{t_1^2}{\pi^2}, \quad \text{also}$$

21) $$E = \frac{\pi^2}{t_1^2} \frac{mg \cdot l}{gF}.$$

Beispiel 2: Für einen Stahlstab sei $E = 2\,500\,000$ at; $F = 1$ qcm; $l = 5$ m $= 500$ cm; $mg = 1000$ kg. Dann ist die Gleichgewichtsspannung $\sigma_0 = 1000$ at, die entsprechende Verlängerung

$$\Delta l = \frac{1000 \cdot 500}{2\,500\,000} = 0{,}2 \text{ cm}.$$

Die Schwingungsdauer entspricht einer Pendellänge $= 0{,}2$ cm und beträgt mit $g = 981$ cm/s²

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{0{,}2}{981}} = \frac{1}{22} \text{ Sekunden.}$$

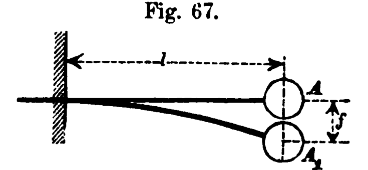
Beginnt die Bewegung bei A, dem spannungslosen Zustande der Stange entsprechend, so geht die Masse m mit der Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{0{,}2 \cdot 981} = 14 \text{ cm/s}.$$

durch die Gleichgewichtslage A_1.

Querschwingungen. Annähernd gelten die Gl. 15—17 auch, wenn ein leichter elastischer Stab durch die daran befestigte Masse m nach Fig. 67 in Biegungsspannungen versetzt wird, weil innerhalb der Elasticitätsgrenze die Durchbiegung verhältnisgleich mit der biegenden Kraft wächst. Die Lage A entspricht dem spannungslosen Zustande des Stabes. Die Gleichgewichtslage A_1 befindet sich um das Mafs der einer Last mg zugehörigen Durchbiegung

Fig. 67.



22) $$f = \frac{mg \cdot l^3}{3\,EJ} = e$$

(2. Theil, S. 43, Gl. 7) tiefer als A, wenn l die Länge des Stabes, J das Trägheitsmoment seines Querschnitts. Die Schwingungsdauer entspricht einer Pendellänge f.

Kommt die Masse etwa durch einen nach unten gerichteten Schlag aus der Gleichgewichtslage, so ist die halbe Schwingungsweite a nach Gl. 17 von der dem Massenpunkte durch den Schlag ertheilten Geschwindigkeit c abhängig. Wird nun der Schlag nach einer oder nach mehreren Doppelschwingungen, d. h. in Zwischenzeiten $2\,t_1$, $4\,t_1$ oder allgemein $2\,n\,t_1$ wiederholt (worin n eine Ganzzahl bedeutet), so entsteht dadurch jedes Mal eine Vergrösserung der Geschwindigkeit c und in Folge dessen auch der stärksten Durchbiegung und Spannung. Solche Wiederholung von Schlägen oder Stössen kann also einen in elastischen Schwingungen befindlichen Stab zum Bruche führen. Aus diesem Grunde können Brückenträger, für welche die Dauer einer einfachen Schwingung t_1 beträgt, gefährdet werden, wenn Menschen in gebundenem Schritt über die Brücke marschiren und die Dauer eines Schrittes ein ganzes Vielfaches von $2\,t_1$ beträgt. Auch die Stösse eines Eisenbahnzuges erfolgen in einem gewissen Takte; daher spricht man von einer „kritischen" Geschwindigkeit eines Zuges in Bezug auf eine Brücke. Wiederholen sich aber die Stösse in der Zwischenzeit t_1, der Dauer einer einfachen Schwingung, so hebt jeder zweite Stoss die Wirkung des ersten wieder auf, so dass gefährliche Schwingungen weniger leicht zu erwarten sind.

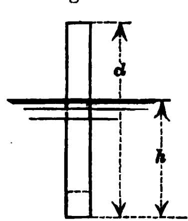
b) Lothrechte Schwingung schwimmender Körper.

Ein prismatischer Stab von dem Querschnitt F und der Länge d (Fig. 67) sei am unteren Ende derartig beschwert, dass er, um die

Länge h in Wasser eingetaucht, in lothrechter Schwimmlage im Gleichgewicht ist. Dann heben sich an dem Stabe das Gewicht mg und der Auftrieb $A = \gamma F h$ (vergl. 2. Theil, S. 184) auf, wenn γ das Gewicht der Kubikeinheit des Wassers. Beträgt die eingetauchte Länge des Stabes x, so hat der Auftrieb die Grösse $K = \gamma \cdot F \cdot x$, ist also eine mit der Tiefe x des unteren Stabendes unter dem Wasserspiegel verhältnisgleiche Kraft. Unter Vernachlässigung der Bewegungswiderstände des Stabes im Wasser kann man die Sätze S. 58 auf die Bewegung des Stabschwerpunktes anwenden.

Wenn das untere Ende des Stabes den Wasserspiegel eben berührt, befindet sich der Stabschwerpunkt in der Lage, die dem Werthe Null der Kraft K entspricht. Ruhig schwimmend, liegt der Stab um h tiefer als in der eben genannten Lage für $K = 0$; es ist daher die S. 58 eingeführte Grösse e hier

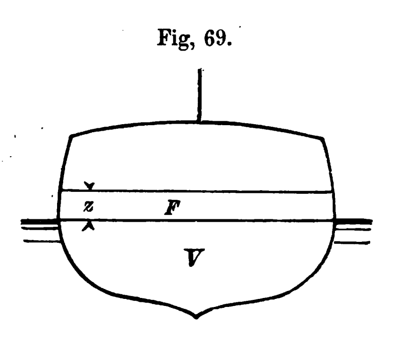
Fig. 68.



$$e = h. \tag{23}$$

Wird der Stab durch einen leichten Stoss aus der Ruhelage gebracht, so schwingt er um die Gleichgewichtslage als Mitte, und die Dauer einer einfachen Schwingung entspricht einer Pendellänge, gleich der Eintauchungstiefe h im Ruhezustande. Es darf nur die Bewegung nicht so bedeutend sein, dass der Stab ganz unter Wasser oder ganz aus dem Wasser komme, denn in beiden Fällen verschwindet die Veränderlichkeit des Auftriebes K.

Fig, 69.



Obige Betrachtungen bleiben auch gültig, wenn der eingetauchte Körper nicht prismatisch ist; es muss nur derjenige Theil des schwimmenden Körpers, der bei der Schwingung durch die Wasserspiegelebene hindurch geht, ein lothrechtes Prisma von dem wagerechten Querschnitt F sein. Nennt man V den eingetauchten Rauminhalt des Körpers im Ruhezustande, so dass

$$\gamma V = mg, \tag{24}$$

so vergrössert sich in Folge einer Vermehrung der Eintauchung um z der Auftrieb um $\gamma F z$. Dies ist also die Kraft, welche den Körper in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt und ihm eine Beschleunigung

$$p = -\frac{\gamma F z}{m} = -k^2 z$$

(Gl. 14) ertheilt. Dann ist

$$k^2 = \frac{\gamma F}{m} = \frac{\gamma F g}{m g} = \frac{\gamma F g}{\gamma V}$$

(nach Gl. 24), mithin $k^2 = \frac{F}{V} g$ und

25) $$t_1 = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{V}{F g}}.$$

Die Schwingungslänge wird also nach Gl. 16 hier allgemein

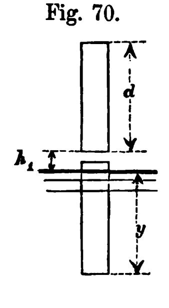
26) $$e = \frac{V}{F},$$

anstatt des besonderen Werthes h bei prismatischen Körpern.

c) Eintauchen eines ins Wasser fallenden lothrechten Stabes.

Lässt man einen prismatischen Stab vom Querschnitt F, der Länge d, dem Gewichte mg, dessen unteres Ende zu Anfang um h_1 über Wasser liegt, hinabfallen (Fig. 70), so kann die Tiefe y, bis zu welcher er überhaupt einsinkt, am einfachsten mittels des Satzes vom Arbeitsvermögen (1. Theil, S. 266) berechnet werden. Längs des Weges h_1 erfolgt eine gleichförmig beschleunigte Fallbewegung, längs des weiteren Weges y eine Bewegung unter Einwirkung eines veränderlichen Auftriebs, d. h. nach den auf S. 53 u. ff. gegebenen Regeln, und schliesslich ist die Aufwärtsbewegung der Abwärtsbewegung symmetrisch. Bei der Berechnung der Arbeit braucht man aber auf die Einzelheiten der Bewegung nicht einzugehen. Einer Eintauchung y entspricht ein

Fig. 70.



Auftrieb $K = \gamma F y$, und die Arbeit dieser veränderlichen Kraft beträgt bis zu einer Eintauchung y:

$$27) \qquad \mathfrak{A} = -\int_0^y K\,dy = -\,{}^1\!/_2\,\gamma F y^2.$$

Da nun in der höchsten und in der tiefsten Lage die Geschwindigkeit des Stabes Null ist, so muss die Gesammtarbeit der Schwere und des Auftriebs auch Null sein, daher

$$mg\,(h_1 + y) = {}^1\!/_2\,\gamma F y^2.$$

Bezeichnet man wieder die Eintauchungstiefe im Gleichgewichte mit h, so ist

$$mg = \gamma \cdot F \cdot h \quad \text{und}$$

$$2\,h\,(h_1 + y) = y^2; \quad \text{dies giebt}$$

$$28) \qquad y = h\left(1 \pm \sqrt{1 + 2\frac{h_1}{h}}\right).$$

von den doppelten Vorzeichen ist hier nur das Zeichen $+$ verwendbar. Diese Gleichung ist aber nur gültig, solange $y \leqq d$ bleibt, weil für $y > d$ der Auftrieb nicht mehr veränderlich sein würde. Demnach muss die Höhe des freien Falles

$$29) \qquad h_1 \leqq \left(\frac{d}{2\,h} - 1\right) d$$

sein. Dies ist nur möglich für $d > 2\,h$. Hierbei sind freilich die Bewegungswiderstände und der Arbeitsverlust beim Aufschlagen auf das Wasser vernachlässigt.

Beispiel 3: Es sei $d = 1^{\text{m}}$, die Gleichgewichtseintauchung $h = 0{,}4^{\text{m}}$, dann muss

$$h_1 \leqq \frac{d}{4}, \quad \text{d. h.} \quad h_1 \leqq 0{,}25^{\text{m}}$$

sein. Lässt man nun den Stab aus der Höhe $h_1 = 0{,}2^{\text{m}}$ fallen, so beträgt die stärkste Eintauchung

$$y = 0{,}4\,(1 + \sqrt{1 + 1}) = 0{,}966^{\text{m}}.$$

2. Fall eines Massenpunktes aus sehr grosser Höhe ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand.

Fällt der Massenpunkt aus so grosser Höhe, dass die Fallbeschleunigung nicht mehr als konstant angesehen werden kann, so hat man für dieselbe

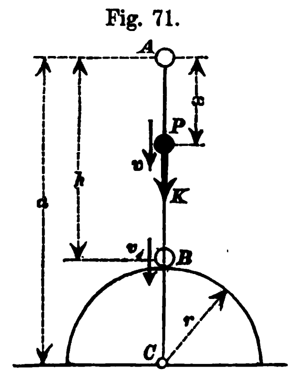


Fig. 71.

1) $$g_x = g\frac{r^2}{(a-x)^2}$$

zu setzen (1. Theil, S. 57), wenn g die Fallbeschleunigung $= 9{,}81$ an der Erdoberfläche, r der Erdhalbmesser, $a-x$ die augenblickliche Entfernung des Massenpunktes von dem Erdmittelpunkte C (Fig. 71). (Der Kreis im unteren Theile der Figur soll die Erde andeuten.) Die Bewegung beginne bei A in der Höhe h über der Erdoberfläche, im Abstand $a = h + r$ vom Mittelpunkte der Erde, mit der Geschwindigkeit Null. Nach t Sekunden habe der Punkt x Meter zurückgelegt, habe die Geschwindigkeit v und befinde sich bei P; dann ist nach Gl. 1

$$\frac{dv}{dt} = \frac{gr^2}{(a-x)^2};$$

dies giebt, mit $v\,dt = dx$ multiplicirt:

$$v\,dv = gr^2\frac{dx}{(a-x)^2} = -gr^2\frac{d(a-x)}{(a-x)^2};$$

mithin ist
$$\frac{v^2}{2} = \frac{gr^2}{a-x} + C$$

und wegen $v = 0$ für $x = 0$:

$$0 = \frac{gr^2}{a} + C, \quad \text{also}$$

$$v^2 = 2gr^2\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}\right) = 2gr^2\frac{x}{a(a-x)} \quad \text{und}$$

2) $$v = r\sqrt{\frac{2gx}{a(a-x)}}.$$

Für $x = h$, $a = r + h$ und $a - x = r$ wird v zur Endgeschwindigkeit v_1, mit der der Punkt bei B an der Erdoberfläche anlangt, nämlich

$$v_1 = r\sqrt{\frac{2gh}{(r+h)r}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{h}{r}}}. \tag{3}$$

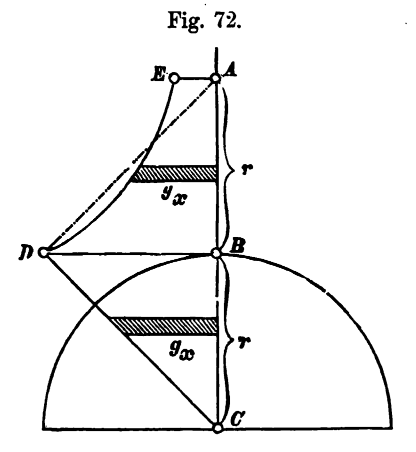
Hieraus ist zu ersehen, dass man, sobald die Fallhöhe h gegen den Erdhalbmesser klein ist, $v_1 = \sqrt{2gh}$ setzen darf. Bemerkenswerth ist ferner, dass man, ebenso wie beim barometrischen Höhenmessen (2. Theil, S. 214), in der für konstante Fallbeschleunigung gültigen Formel $v_1 = \sqrt{2gh}$ die Fallhöhe h durch $\dfrac{h}{1+\frac{h}{r}}$ ersetzen muss, um den für veränderliche Fallbeschleunigung gültigen Werth zu erhalten.

Für $h = r$ entsteht aus Gl. 3

$$v_1 = \sqrt{gr}. \tag{4}$$

Die gleiche Geschwindigkeit würde sich auch ergeben, wenn der Massenpunkt die Strecke $BC = r$ (Fig. 72) im Innern der homogen gedachten Erde zurücklegte (siehe S. 57, Gl. 11). Daraus folgt, dass auch die Arbeiten der Schwerkraft längs dieser beiden Wege AB und BC gleich sein müssen. Die auf die Masseneinheit kommende Schwerkraftarbeit ist aber offenbar $\int g_x \cdot dx$, d. h. gleich der der durchfallenen Höhe entsprechenden Fläche derjenigen Kurve, welche das veränderliche g_x darstellt. Für das Innere der Erde ist nach dem 1. Theile, S. 58 die Darstellung von g_x eine Gerade CD mit $BD = g = 9{,}81$, für die Bewegung ausserhalb der Erde eine hyperbelartige Kurve DE mit $AE = {}^1\!/\!_4\, g$. Mithin muss

Fig. 72.



$BCD = ABDE$, also auch $ABDE = ABD = \frac{1}{2} g r$ sein. Die Nachrechnung ergiebt auch mit $g_x = \frac{g r^2}{(a - x)^2}$ und $a = 2r$

5) $$\int_{x=0}^{x=r} g_x dx = \frac{g r}{2}.$$

Schreibt man Gl. 3 in der Form

6) $$v_1 = \sqrt{\frac{2 g h r}{r + h}} = \sqrt{\frac{2 g r}{\frac{r}{h} + 1}},$$

so erhält man für Fallhöhen h, gegen die selbst der Erdhalbmesser r vernachlässigt werden darf, d. h. für $\frac{h}{r} = \infty$:

7) $$v_1 = \sqrt{2 g r}.$$

D. h. wenn ein Punkt nach dem allgemeinen Gesetze der Massenanziehung (1. Theil, S. 55) aus unendlicher Ferne von der Erde angezogen wird, so ist seine Geschwindigkeit an der Erdoberfläche dieselbe, als ob er mit konstanter Fallbeschleunigung g eine Höhe, gleich dem Erdhalbmesser r, durchfallen hätte. Die Gesammtfläche der bis ins Unendliche über E (Fig. 72) hinaus fortgesetzten Linie DE der Fallbeschleunigung muss daher $= g r$ sein.

Die zur Fallbewegung erforderliche Zeit ergiebt sich, wenn man in Gl. 2 $v = dx : dt$ setzt und schreibt

$$dt = \sqrt{\frac{a}{2 g r^2}} \sqrt{\frac{a - x}{x}} dx.$$

Bei der Integration von Ausdrücken dieser Art muss man aus dem Zähler ein etwaiges Wurzelzeichen zu beseitigen suchen; daher multiplicire man Zähler und Nenner mit $\sqrt{a - x}$, um zu erhalten

$$dt = \sqrt{\frac{a}{2 g r^2}} \frac{a - x}{\sqrt{a x - x^2}} dx.$$

Weil nun $d(a x - x^2) = (a - 2x) dx = 2\left(\frac{a}{2} - x\right) dx$,

so vertausche man im Zähler a mit $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ und ordne

8) $$dt = \sqrt{\frac{a}{2 g r^2}} \left\{ \frac{\frac{1}{2} a - x}{\sqrt{a x - x^2}} dx + \frac{a}{2} \frac{dx}{\sqrt{a x - x^2}} \right\}$$

Das Integral des ersten Summanden in der Klammer ist $\sqrt{ax - x^2}$; um den zweiten Summanden auf eine der Grundformeln zurückzuführen, setze man vorübergehend $x = b - y$ mit $dx = - dy$; dann wird

$$\sqrt{ax - x^2} = \sqrt{ab - ay - b^2 + 2by - y^2}.$$

Man bestimmt nun die bis jetzt willkürliche Grösse b so, dass unter dem Wurzelzeichen die Glieder mit der ersten Potenz von y verschwinden, also $2b = a$, d. h. $b = {}^1\!/_2\, a$ werde; dann wird

$$\frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = - \frac{dy}{\sqrt{ab - b^2 - y^2}} = - \frac{dy}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - y^2}}$$

$$= - \frac{dy}{\frac{a}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{2}{a}y\right)^2}} = - \frac{d\left(\frac{2}{a}y\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{a}y\right)^2}} = d\left(\arccos \frac{2}{a}y\right)$$

$$= d\left(\arccos \frac{a - 2x}{a}\right).$$

Hiernach liefert die Integration der Gl. 8:

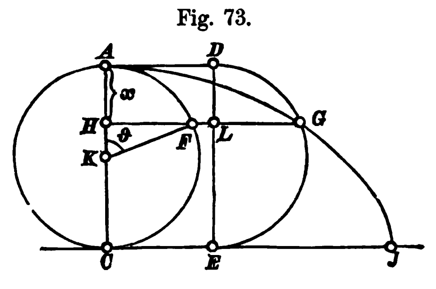
$$9) \qquad t = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}}\left\{\sqrt{ax - x^2} + \frac{a}{2} \arccos \frac{a - 2x}{a}\right\}.$$

Eine Integrationskonstante braucht nicht mehr hinzugefügt zu werden, weil für $x = 0$ richtig

$$t = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}}\left(0 + \frac{a}{2} \arccos 1\right) = 0 \quad \text{entsteht.}$$

Gl. 9 ist nach x nicht auflösbar, doch lässt sich der Klammerausdruck der rechten Seite leicht mittels einer Cykloide darstellen. Lässt man (Fig. 73) einen Kreis vom Durchmesser a auf der Geraden JC rollen und von einem Punkt des Umfanges die Cykloide JA erzeugen und zieht in einer Tiefe $AH = x$ unter dem Scheitelpunkte der Cykloide eine Parallele zu CJ, so ist

Fig. 73.



$$HF = \sqrt{x(a - x)} = \sqrt{ax - x^2}.$$

Ferner ist

$$\cos HKF = \cos \vartheta = \frac{{}^1\!/_2\, a - x}{{}^1\!/_2\, a} = \frac{a - 2x}{a},$$

mithin der Kreisbogen

$$AF = \frac{a}{2} \operatorname{arc} \cos \frac{a - 2x}{a}.$$

Macht man also $\ddot{A}\ddot{D} = \widehat{AF}$ und zeichnet den Halbkreis DGE, so ist $LG = HF$, $HL = AD = \widehat{AF}$, mithin

$$HG = \sqrt{ax - x^2} + \frac{a}{2} \operatorname{arc} \cos \frac{a - 2x}{a}.$$

Für $a = 2r$ und $x = r$, d. h. für den Fall aus der Höhe r über der Erdoberfläche bis zu dieser, ist eine Zeit erforderlich

$$t = \sqrt{\frac{2r}{2gr^2}} \left\{ \sqrt{2r^2 - r^2} + r \operatorname{arc} \cos 0 \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{gr}}\, r \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{r}{g}},$$

während der Fall von der Oberfläche bis zum Mittelpunkte der Erde nach Gl. 12, S. 57 nur die Zeit

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}}$$

in Anspruch nehmen würde. Der Unterschied erklärt sich dadurch, dass in dem jetzt vorliegenden Falle die Beschleunigung zu Anfang nur den geringen Werth $^1/_4\, g$ hat, dass daher die Geschwindigkeit nur langsam zunimmt, während in dem auf S. 56/57 behandelten Falle die Bewegung mit der Maximalbeschleunigung g beginnt.

Einen noch klareren Einblick in diese Verhältnisse gewinnt man, wenn man für jede der hier in Vergleich stehenden Bewegungen die Geschwindigkeitskurve (nach 1. Theil, S. 10) aufzeichnet, d. h. zu den Zeiten als Abscissen die Geschwindigkeiten als Ordinaten aufträgt.

Für die ausserhalb der Erde von A nach B (Fig. 72) verlaufende Bewegung fehlt es allerdings an einer unmittelbaren Beziehung zwischen v und t; führt man aber die Wegeslängen x als Hülfsgrössen ein, so kann man mittels Gl. 2 das entsprechende v und nach Gl. 9 das zugehörige t ermitteln, wobei zur Erleichterung der Berechnung noch die Figur 73 benutzt werden kann.

So entspricht beispielsweise $x = 0{,}1\, r$, wenn man dies in Gl. 9 einführt und gleichzeitig $a = 2r$ setzt, $t = 0{,}887 \sqrt{\frac{r}{g}}$; Gl. 2 aber liefert mit den

gleichen Werthen für a und x $v = 0{,}229\sqrt{gr}$. Diese Koordinaten t und v bestimmen einen Punkt der Geschwindigkeitskurve, und in gleicher Weise findet man eine beliebige Zahl anderer;

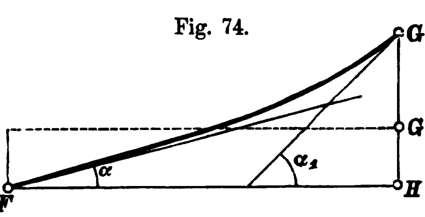


Fig. 74.

wählt man für $\sqrt{\frac{r}{g}}$ das Mafs 2 cm, für $\sqrt{gr}$ ebenfalls das Mafs 2 cm, so ergiebt sich die Geschwindigkeitskurve Fig. 74. Die Beschleunigung erscheint nach 1. Theil, S. 15 als das Ansteigungsverhältnis der Geschwindigkeitskurve; es ist

$$GH = \sqrt{g \cdot r} \qquad FH = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{r}{g}} = 2{,}57\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Da nun die Fallbeschleunigung in der Höhe r über der Erdoberfläche $^1/_4\, g$, an der Erdoberfläche g beträgt, so muss $\operatorname{tg}\alpha = {}^1/_4 \operatorname{tg}\alpha_1$ sein, wenn α und α_1 die Neigungswinkel der Kurve bei F und G bedeuten.

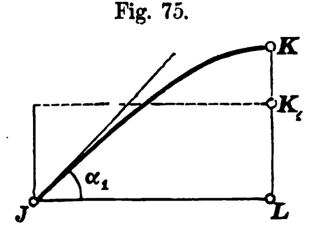
Für die Bewegung im Inneren der Erde von B nach C (Fig. 72) gilt, wenn man von der Stelle B aus die Wege und Zeiten misst, ein Bewegungsgesetz von etwas anderer Form als Gl. 5, S. 54. Es würde nämlich jetzt in Fig. 62, S. 55 $BQ = ct$ und $BP = x = r\left(1 - \cos\frac{ct}{r}\right)$ sein, oder, weil $c = \sqrt{g \cdot r}$, $\quad x = r\left(1 - \cos t\sqrt{\frac{g}{r}}\right)$; und das Geschwindigkeitsgesetz:

$$v = \sqrt{g \cdot r}\,\sin t\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Setzt man hierin beispielsweise $t = 0{,}1\sqrt{\frac{r}{g}}$, so wird $v = \sqrt{g \cdot r}\sin 0{,}1$. Der Bogengrösse 0,1 entspricht die Gradzahl 5,73 oder rund $5^0\,44'$ und der Sinus 0,0999, womit genau genug $\sin 0{,}1 = 0{,}1$ und $v = 0{,}1\sqrt{g \cdot r}$ gefunden ist. In dieser Weise ergeben sich die Koordinaten der Geschwindigkeitskurve JK (Fig. 75), welche einen Theil einer Sinuslinie bildet. Es ist $KL = \sqrt{g \cdot r}$,

$$JL = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} = 1{,}57\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Fig. 75.



Das Ansteigungsverhältnis der Kurve JK an der Stelle J ist $\operatorname{tg}\alpha_1$, d. h. von derselben Grösse wie $\operatorname{tg}\alpha_1$ in Fig. 74. Da nach 1. Theil, S. 11 der Inhalt der Geschwindigkeitskurve die Wegeslänge bezeichnet, und diese in beiden Fällen $= r$ ist, so müssen die Flächen FGH und JKL einander gleich

sein. Die Figur FGH lässt sich in ein Rechteck von der Breite $2{,}57\sqrt{\frac{r}{g}}$ und der Höhe $0{,}39\sqrt{g\cdot r}$ verwandeln, was der Fläche $=r$ entspricht; die Figur JKL ebenso in ein Rechteck von der Breite $1{,}57\sqrt{\frac{r}{g}}$ und der Höhe $0{,}64\sqrt{g\cdot r}$.

3. Bewegung unter alleiniger Einwirkung eines Flüssigkeits-Widerstandes.

Wird ein schwimmender Körper mit einer Geschwindigkeit c in Bewegung gesetzt und sodann der alleinigen Einwirkung des Wasser- und Luftwiderstandes überlassen, so wird er, weil der Auftrieb der Schwerkraft das Gleichgewicht hält, eine verzögerte Bewegung in wagerechter gerader Linie ausführen. Man kann den Flüssigkeitswiderstand W mit dem Quadrate der veränderlichen Geschwindigkeit v verhältnisgleich annehmen, also setzen

1) $$W = A v^2.$$

Es empfiehlt sich nun, zur Abkürzung der Ergebnisse eine Geschwindigkeit k einzuführen, bei welcher der Körper oder Massenpunkt m einen Widerstand, gleich seinem Gewichte mg, erfährt. Dann wird aus Gl. 1:

$$mg = A k^2,$$

woraus durch Verbindung mit Gl. 1

2) $$W = mg\frac{v^2}{k^2}$$

entsteht. Hiernach wird die Beschleunigung

3) $$\frac{dv}{dt} = -\frac{W}{m} = -g\frac{v^2}{k^2} \quad \text{oder}$$

$$dt = -\frac{k^2}{g}\frac{dv}{v^2} = \frac{k^2}{g}d\left(\frac{1}{v}\right), \quad \text{mithin}$$

$$t = \frac{k^2}{g}\frac{1}{v} + C;$$

weil für $t = 0$, $v = c$ war, so muss

$$0 = \frac{k^2}{g} \frac{1}{c} + C \quad \text{sein;}$$

also folgt (durch Abziehen)

4) $$t = \frac{k^2}{g}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right) \quad \text{und hieraus}$$

5) $$v = \frac{c}{1 + \frac{g}{k^2} c \cdot t}.$$

Setzt man $v = \frac{dx}{dt}$, und verwandelt $c \cdot dt$ in

$$\frac{k^2}{g} d\left(1 + \frac{g}{k^2} c \cdot t\right), \quad \text{so wird}$$

$$dx = \frac{k^2}{g} \frac{d\left(1 + \frac{g}{k^2} c \cdot t\right)}{1 + \frac{g}{k^2} c \cdot t}, \quad \text{also}$$

6) $$x = \frac{k^2}{g} \, \mathrm{l}\left(1 + \frac{g}{k^2} c \cdot t\right).$$

(Die Integrationskonstante verschwindet hier, weil für $t = 0$ auch $x = 0$ wird.) Weil nach Gl. 5

$$1 + \frac{g}{k^2} c \cdot t = \frac{c}{v},$$

so kann man durch Einsetzung dieses Werthes in Gl. 6 eine unmittelbare Beziehung zwischen Geschwindigkeit v und Länge x erhalten, nämlich

7) $$x = \frac{k^2}{g} \, \mathrm{l}\left(\frac{c}{v}\right) \quad \text{oder} \quad v = c \cdot e^{-\frac{g}{k^2} x}.$$

Nach diesen Ergebnissen ist die Bewegung des schwimmenden Körpers weder der Zeit noch dem Orte nach begrenzt. Es wird v erst zu Null für $t = \infty$ (Gl. 5) und für $x = \infty$ (Gl. 7). Ein einmal in Bewegung gesetzter schwimmender Körper wird also, wenn der Widerstand genau proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit (Gl. 2) und die Wasserfläche unbegrenzt ist, niemals und nirgends zur

Ruhe kommen. Er würde, wenn keine Störungen eintreten, das ganze Weltmeer durchschwimmen. In Wirklichkeit dürfte dies nicht zutreffen, weil der Widerstand des Wassers der Gl. 2 nicht genau entspricht, weil das Wasser eine gewisse Klebrigkeit hat, die den Widerstand, nachdem die Geschwindigkeit sehr klein geworden ist, erheblich beeinflussen kann, weil endlich Luft und Wasser nie ganz ruhig bleiben.

Beispiel: Ergiebt ein Schiff von $mg = 3000^{t} = 3\,000\,000^{kg}$ Gewicht bei einer Geschwindigkeit von $7^{m}/_{s.}$ einen Widerstand von $15\,000^{kg}$, so ist nach Gl. 2

$$k^2 = \frac{mg}{W} v^2 = \frac{3000}{15} \cdot 49 = 9800\,, \quad \text{d. h.}$$

$$k \text{ rund } = 100^{m}.$$

Ertheilte man nun dem Schiff eine Anfangsgeschwindigkeit $c = 10^{m}/_{s.}$, so würde ohne weitere Triebkraft zur Zurücklegung einer Strecke von 1000^{m} eine Zeit erforderlich sein, die aus Gl. 6 (mit $g = 10$)

$$1000 = \frac{10\,000}{10} \, \mathfrak{l} \left(1 + \frac{10}{10\,000} \, 10\, t\right)$$

gefunden werden kann. Es müsste

$$\mathfrak{l}\left(1 + \frac{t}{100}\right) = 1\,, \quad \text{oder}$$

$$1 + \frac{t}{100} = e = 2{,}7183\,, \quad \text{also}$$

$$t = 172^{s.} \text{ betragen.}$$

Das Schiff hat in diesem Augenblicke noch eine Geschwindigkeit (nach Gl. 5)

$$v = \frac{10}{1 + 0{,}01\, t} = \frac{10}{2{,}72} = 3{,}68\, ^{m}/_{s.}\,.$$

Von der Arbeit, welche nöthig war, um dem Schiffe die Anfangsgeschwindigkeit zu ertheilen, nämlich

$$3\,000\,000 \cdot \frac{c^2}{2g} = 15\,000\,000^{mkg}\,,$$

sind noch

$$mg \cdot \frac{v^2}{2g} = \text{rund } 2\,030\,000^{mkg}\,,$$

d. h. $13{,}5\,\%$ vorhanden, $86{,}5\,\%$ durch den Wasserwiderstand aufgezehrt.

Nach einer Stunde ($t = 3600$) würde $v = 0{,}27\, ^{m}/_{s.}$, $x = 3611^{m}$ betragen;

nach 2 Stunden: $v = 0{,}137\, ^{m}/_{s.}$, $x = 4290^{m}$;

nach 10 Stunden: $v = 0{,}0277\, ^{m}/_{s.}$, $x = 5889^{m}$.

4. Lothrechte Wurf- und Fallbewegung in einem widerstehenden Mittel (Luft oder Wasser).

a) Steigen.

Wird der Massenpunkt m bei A (Fig. 76) mit der Geschwindigkeit c lothrecht aufwärts geworfen und wirken auf ihn die Schwere mg und der Widerstand W eines Mittels (etwa der Luft) verzögernd, so mag er nach t Sekunden einen Weg $AP = x$ zurückgelegt und die Geschwindigkeit v erhalten haben. Führt man, wie Gl. 2, S. 71, den Widerstand in der Form

Fig. 76.

1) $$W = mg\frac{v^2}{k^2}$$

ein, so wird die Beschleunigung

2) $$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{W}{m} = -g\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right).$$

Hieraus erhält man die Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Zeit, indem man die Veränderlichen trennt, nämlich schreibt:

$$-g \cdot dt = \frac{dv}{1 + \left(\frac{v}{k}\right)^2} = k\frac{d\left(\frac{v}{k}\right)}{1 + \frac{v^2}{k^2}},$$

so dass entsteht $\quad g \cdot t = -k \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{k} + C.$

Weil $v = c$ war für $t = 0$, so muss ferner sein

$$0 = -k \operatorname{arc\,tg}\frac{c}{k} + C,$$

also nach Entfernung von C mittels Abziehens der letzten Gleichung von der vorhergehenden

3) $$t = \frac{k}{g}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{k} - \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{k}\right).$$

Will man die Zeit t wissen, nach welcher die aufwärts gerichtete Geschwindigkeit v zu Null geworden ist, so setze man $v = 0$ in Gl. 3 ein und erhält dadurch die

4) $$\textbf{Steigdauer } t_1 = \frac{k}{g}\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{k}.$$

Zur Ermittelung der **Steighöhe** ist es am einfachsten, x als $f(v)$ zu entwickeln. Zu dem Zwecke multiplicire man Gl. 2 mit $v\,dt = dx$; dann wird

$$v\,dv = -g\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right)dx,$$

oder nach Trennung der Veränderlichen

$$dx = -\frac{1}{2g}\frac{2v \cdot dv}{1 + \frac{v^2}{k^2}} = -\frac{k^2}{2g}\frac{2\frac{v \cdot dv}{k^2}}{1 + \frac{v^2}{k^2}}, \quad \text{also}$$

$$x = -\frac{k^2}{2g}\,\mathrm{l}\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right) + C.$$

Weil $x = 0$ für $v = c$, so wird

$$C = \frac{k^2}{2g}\,\mathrm{l}\left(1 + \frac{c^2}{k^2}\right) \quad \text{und}$$

5) $$x = \frac{k^2}{2g}\,\mathrm{l}\left(\frac{k^2 + c^2}{k^2 + v^2}\right).$$

Will man die Höhe $x = h$ wissen, bei welcher die Geschwindigkeit zu Null geworden ist, so setze man $v = 0$ in Gl. 5 ein, und erhält die

6) $$\textbf{Steighöhe}\ h = \frac{k^2}{2g}\,\mathrm{l}\left(1 + \frac{c^2}{k^2}\right).$$

Eine unmittelbare Beziehung zwischen x und t ist nicht sehr bequem, kann aber in folgender Weise aus Gl. 3 erhalten werden:

Man setze $$\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{k} = \alpha, \quad \text{also}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = k\,\mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{gt}{k}\right) \quad \text{und}$$

$$dx = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{gt}{k}\right)d\left(\frac{g}{k}t\right) = -\frac{k^2}{g}\,\mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{gt}{k}\right)d\left(\alpha - \frac{gt}{k}\right).$$

Nun ist

$$\int \mathrm{tg}\,x\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int\frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\,\mathrm{l}\,(\cos x), \quad \text{daher}$$

$$x = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\left(\cos\left(\alpha - \frac{gt}{k}\right)\right) + C = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\left\{\cos\alpha \cdot \cos\frac{gt}{k} + \sin\alpha \cdot \sin\frac{gt}{k}\right\} + C,$$

$$0 = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\,(\cos\alpha) + C,$$

also
$$x = \frac{k^2}{g}\, \mathrm{l} \left\{ \cos\frac{gt}{k} + \operatorname{tg}\alpha \sin\frac{gt}{k} \right\}$$

und, weil
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{k}:$$

7)
$$x = \frac{k^2}{g}\, \mathrm{l} \left\{ \cos\frac{gt}{k} + \frac{c}{k} \sin\frac{gt}{k} \right\}.$$

b) Fallen.

Nachdem die Höhe h erstiegen wurde, beginnt das Fallen mit der Beschleunigung g, die aber mit wachsender Geschwindigkeit durch den Widerstand des Mittels vermindert wird. Nach t Sekunden sei die Höhe x durchfallen (Fig. 77), die Geschwindigkeit v geworden, dann ist die Beschleunigung

Fig. 77.

8)
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{W}{m} = g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right).$$

Es möge zunächst die Geschwindigkeit v_1 berechnet werden, mit der der Massenpunkt unten bei A wieder anlangt; dann multiplicire man Gl. 8 mit $v\,dt = dx$:

$$v\,dv = g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right) dx$$

und schreibe
$$\frac{-2\frac{v}{k}\, d\left(\frac{v}{k}\right)}{1 - \frac{v^2}{k^2}} = -\frac{2g}{k^2}\, dx,$$
woraus entsteht:

$$\mathrm{l}\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right) = -\frac{2g}{k^2}\, x,$$

da (wegen $x = 0$; $v = 0$) die Konstante zu Null wird. Hieraus folgt für $x = h$ und $v = v_1$:

9)
$$\mathrm{l}\left(1 - \frac{v_1^2}{k^2}\right) = -\frac{2g}{k^2}\, h \quad \text{oder}$$

10)
$$v_1 = k\left(1 - e^{-\frac{2gh}{k^2}}\right)^{1/2}.$$

Einfacher führt man v_1 auf die Geschwindigkeit c des Aufwurfes an derselben Stelle A zurück, indem man aus Gl. 6 und 9 die Höhe h entfernt, und erhält

$$\mathfrak{l}\left(1-\frac{v_1^2}{k^2}\right)=-\mathfrak{l}\left(1+\frac{c^2}{k^2}\right) \quad \text{oder}$$

$$1-\frac{v_1^2}{k^2}=\frac{1}{1+\frac{c^2}{k^2}}, \quad \text{mithin}$$

$$\text{11)} \qquad \frac{v_1}{c}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^2}{k^2}}}, \quad \text{d. h. } v_1 < c.$$

Um nun die Falldauer zu erhalten, schreibe man Gl. 8:

$$\frac{g}{k^2}\,dt=\frac{dv}{k^2-v^2},$$

so dass

$$t=\frac{k^2}{g}\int\frac{dv}{k^2-v^2}+C \quad \text{wird.}$$

Behufs der Integration bedenke man, dass

$$\frac{1}{k^2-v^2}=\frac{A}{k+v}+\frac{B}{k-v}=\frac{Ak-Av+Bk+Bv}{k^2-v^2}$$

geschrieben werden kann, worin, damit

$$(A+B)k-(A-B)v=1$$

werde (für jeden beliebigen Werth von v),

$$A=B \quad \text{und} \quad 2Ak=1$$

sein muss. Hiermit wird

$$\int\frac{dv}{k^2-v^2}=\frac{1}{2k}\int\frac{dv}{k+v}+\frac{1}{2k}\int\frac{dv}{k-v}$$

$$=\frac{1}{2k}\,\mathfrak{l}(k+v)-\frac{1}{2k}\,\mathfrak{l}(k-v), \quad \text{also}$$

$$\text{12)} \qquad t=\frac{k}{2g}\,\mathfrak{l}\left(\frac{k+v}{k-v}\right),$$

indem $C=0$ wird, weil $v=0$ richtig $t=0$ liefert. — Setzt man nun $v=v_1$, so wird aus t die **Falldauer** t_2, d. h.

$$\text{13)} \qquad t_2=\frac{k}{2g}\,\mathfrak{l}\left(\frac{k+v_1}{k-v_1}\right).$$

Aus Gl. 11 ergiebt sich aber

$$\frac{k+v_1}{k-v_1} = \frac{(c+\sqrt{c^2+k^2})^2}{k^2}, \text{ mithin}$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{k+v_1}{k-v_1}\right) = \mathrm{l}\left(\frac{c+\sqrt{c^2+k^2}}{k}\right);$$

die Einsetzung dieses Werthes in Gl. 13 liefert:

$$14) \qquad t_2 = \frac{k}{g}\,\mathrm{l}\left(\frac{c+\sqrt{c^2+k^2}}{k}\right);$$

hiermit ist die Falldauer unmittelbar auf gegebene Grössen zurückgeführt.

Die unmittelbare Beziehung zwischen x und t wird wieder etwas umständlich. Gl. 12 lässt sich schreiben

$$k+v = (k-v)\,e^{\frac{2g}{k}t},$$

woraus sich ergiebt:

$$v = \frac{dx}{dt} = k\,\frac{e^{\frac{2g}{k}t}-1}{e^{\frac{2g}{k}t}+1} = k\,\frac{e^{\frac{g}{k}t}-e^{-\frac{g}{k}t}}{e^{\frac{g}{k}t}+e^{-\frac{g}{k}t}}$$

$$dx = \frac{k^2}{g}\,\frac{e^{\frac{g}{k}t}-e^{-\frac{g}{k}t}}{e^{\frac{g}{k}t}+e^{-\frac{g}{k}t}}\,d\left(\frac{g}{k}t\right);$$

da nun der Zähler die Abgeleitete des Nenners darstellt, so ist

$$x = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\left\{e^{\frac{g}{k}t}+e^{-\frac{g}{k}t}\right\} + C_1.$$

Weil $t=0$ auch $x=0$ geben muss, so wird

$$0 = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\,2 + C_1,$$

daher durch Abziehen

$$15) \qquad x = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\left\{\frac{e^{\frac{g}{k}t}+e^{-\frac{g}{k}t}}{2}\right\}.$$

Die Beschleunigung der Abwärtsbewegung würde zu Null werden, wenn die Geschwindigkeit v den Werth k erreichte, weil für diesen Fall der Widerstand $W = mg$ werden würde (Fig. 78). Ertheilt man also dem Massenpunkt in dem Sinne abwärts die Geschwindigkeit k, so führt er eine gleichmässige Bewegung aus. Daher wollen wir k die Gleichgewichtsgeschwindigkeit nennen.

Bei der mit der Geschwindigkeit Null beginnenden Fallbewegung kann die Geschwindigkeit v nach Gl. 12 den Werth k aber erst nach unendlich langer Zeit erreichen, denn $v = k$ giebt in dieser Gl. $t = \infty$. Die mit einer Geschwindigkeit, kleiner als k, beginnende Fallbewegung nähert sich daher asymptotisch der gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit k. Bei sehr grosser Fallhöhe kann annähernd die Endgeschwindigkeit $v_1 = k$ gesetzt werden. Ertheilt man dem Punkt im Sinne abwärts eine Geschwindigkeit $> k$, so ist seine Bewegung eine verzögerte, nähert sich aber mit abnehmender Geschwindigkeit, und zwar ebenfalls asymptotisch, wie man leicht findet, der gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit k.

Fig. 78.

$W = mg$, k, mg

Lässt man den Massenpunkt von einer Höhe $h = \frac{k^2}{2g}$ herabfallen, so würde er ohne Wirkung des Luftwiderstandes eine Endgeschwindigkeit k erhalten. Mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes aber wird nach Gl. 10:

$$v_1 = k\sqrt{1 - \frac{1}{e}} = 0{,}795\, k \tag{16}$$

oder rund $0{,}8\, k$.

c) Bestimmung der Gleichgewichtsgeschwindigkeit k.

Ist γ das Gewicht von 1^{cbm} des widerstehenden Mittels; F der grösste Querschnitt des Körpers, rechtwinklig zur Bewegungsrichtung genommen; V der Rauminhalt, $\gamma_1 V$ das Gewicht des Körpers; ζ eine von der Form und Oberflächenbeschaffenheit des Körpers abhängige Widerstandsziffer, so wird nach 2. Theil, S. 326, Gl. 3

$$W = \zeta \gamma F \frac{v^2}{2g},$$

daher, nach Gl. 1 (S. 74), für $v = k$:

$$mg = \gamma_1 V = \zeta \gamma F \frac{k^2}{2g}, \quad \text{also}$$

$$\frac{k^2}{2g} = \frac{\gamma_1}{\gamma}\frac{V}{F}\frac{1}{\zeta} \quad \text{und} \quad k^2 = \frac{\gamma_1}{\gamma}\frac{V}{F}\frac{2g}{\zeta}. \tag{17}$$

Setzt man für **kugelförmige** Körper vom Halbmesser r $\zeta = 0{,}5$; $V = {}^4/_3\, r^3\pi$; $F = r^2\pi$, so entsteht

$$18)\qquad \frac{k^2}{2g} = \frac{8}{3}\frac{\gamma_1}{\gamma}r \quad \text{und} \quad k^2 = 52{,}32\frac{\gamma_1}{\gamma}r.$$

Für **Gusseisenkugeln** ($\gamma_1 = 7200$) in **Luft** ($\gamma = 1{,}29$) wird

$$19)\qquad \frac{k^2}{2g} = 14\,884\,r \quad \text{und} \quad k^2 = 292\,014\,r.$$

Für **Wassertropfen** oder Eiskugeln ($\gamma_1 = 1000$) in **Luft** ($\gamma = 1{,}29$)

$$20)\qquad \frac{k^2}{2g} = 2067\,r \quad \text{und} \quad k^2 = 40\,561\,r.$$

Für **Gusseisenkugeln** ($\gamma_1 = 7200$) in **Wasser** ($\gamma = 1000$) darf der Auftrieb γV des Wassers nicht vernachlässigt werden, oder es kommt bei der Berechnung der Gleichgewichtsgeschwindigkeit k nur das scheinbare Gewicht der Kugel in Bezug auf Wasser $(\gamma_1 - \gamma)V$ (s. 2. Theil, S. 185) in Frage; d. h.

$$(\gamma_1 - \gamma)V = \gamma\zeta F\frac{k^2}{2g} \quad \text{oder}$$

$$\frac{k^2}{2g} = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma}\frac{V}{F}\frac{1}{\zeta} \quad \text{und} \quad k^2 = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma}\frac{V}{F}\frac{2g}{\zeta}.$$

Dies giebt:

$$21)\qquad \frac{k^2}{2g} = 6{,}2 \cdot \frac{8}{3}r = 16{,}5\,r \quad \text{und} \quad k^2 = 324\,r.$$

Beispiel 1: Eine Gusseisenkugel von $r = 0{,}04$ m Halbmesser werde mit einer Geschwindigkeit $c = 500$ m/s. lothrecht aufwärts geschossen. Es sollen h, t_1, v_1 und t_2 berechnet werden.

Zunächst ist nach Gl. 19

$$\frac{k^2}{2g} = 14\,884 \cdot 0{,}04 = 595; \quad k^2 = 292\,014 \cdot 0{,}04 = 11\,681 \quad \text{und} \quad k = 108\text{ m};$$

$$\frac{c}{k} = 4{,}63; \quad \frac{k}{g} = 11.$$

Dann wird die **Steigdauer** (Gl. 4)

$$t_1 = 11 \cdot \text{arc tg}\, 4{,}63 = 11 \cdot \text{arc}\, 77^0\, 49' = 11 \cdot 1{,}3582 = 14{,}9\text{ s.}$$

$$\left(\text{gegen} \quad \frac{500}{g} = 51\text{ s.} \quad \text{ohne Luftwiderstand}\right).$$

Die **Steighöhe** (Gl. 6)

$$h = 595\,\mathfrak{l}\,(1 + 4{,}63^2) = 595 \cdot 3{,}090 = 1839\text{ m}$$

$$\left(\text{gegen} \quad \frac{500^2}{2g} = 12\,742\text{ m} \quad \text{ohne Luftwiderstand}\right).$$

Die Aufschlaggeschwindigkeit unten (Gl. 11)

$$v_1 = \frac{500}{\sqrt{1 + 21{,}44}} = 105{,}5,$$

mithin nur wenig kleiner als $k = 108$ (gegen $c = 500$ ohne Luftwiderstand).

Die Falldauer (Gl. 13)

$$t_2 = \frac{11}{2}\, \mathrm{l}\left(\frac{108 + 105{,}5}{108 - 105{,}5}\right) = 5{,}5 \cdot 4{,}4427 = 24{,}4^{\,\mathrm{s.}}$$

also selbstverständlich $t_2 > t_1$ (gegen 51 s. ohne Luftwiderstand).

Bei geringer Geschwindigkeit c ist die Wirkung des Luftwiderstandes unerheblich. Dieselbe Kugel mit $k = 108$ erreicht mit $c = 21{,}6^{\mathrm{m}}$ Geschwindigkeit eine Höhe $h = 23{,}3^{\mathrm{m}}$ (gegen $23{,}8^{\mathrm{m}}$ ohne Luftwiderstand).

Beispiel 2: Die aus grosser Höhe herabfallenden Regentropfen, Schlossen, Hagelkörner u. dergl. bewegen sich in der Nähe des Erdbodens nahezu gleichförmig mit der Geschwindigkeit k. Nach Gl. 20 ist k verhältnisgleich mit $\sqrt{r}$; kleine Tropfen haben daher sehr geringe Geschwindigkeit, während dicke Tropfen mit grösserer Geschwindigkeit auf den Boden schlagen. Für solche kann $r = 2{,}5^{\mathrm{mm}} = 0{,}0025^{\mathrm{m}}$ sein, dann wird

$$\frac{k^2}{2g} = 5{,}16^{\mathrm{m}} \quad \text{und} \quad k = 10{,}1^{\mathrm{m}}.$$

Derartiger Regen hat also beim Aufschlagen eine Geschwindigkeitshöhe von nur $5{,}16^{\mathrm{m}}$, mag er aus noch so grosser Höhe fallen.

Hagelkörner kommen vor von $0{,}03^{\mathrm{m}}$ Halbmesser und $0{,}1^{\mathrm{kg}}$ Gewicht. Für diese ist die Geschwindigkeitshöhe

$$\frac{k^2}{2g} = 62^{\mathrm{m}}, \qquad \text{die Geschwindigkeit } k \text{ rund } 35^{\mathrm{m}}.$$

Die Schlagwirkung eines Hagelkorns ist nach dem Werthe seines Arbeitsvermögens $\frac{1}{2} m \cdot k^2$ zu beurtheilen. Da nun m mit r^3 verhältnisgleich, k^2 aber mit r in gleichem Verhältnisse wächst, so ist die Schlagwirkung proportional mit der vierten Potenz von r. Ein Hagelkorn vom doppelten Durchmesser hat also die 16 fache Wirkung eines solchen mit einfachem Durchmesser.

Beispiel 3: Wie lange gebraucht eine Gusseisenkugel von $r = 0{,}3^{\mathrm{m}}$ Halbmesser, um eine Meerestiefe von 8000^{m} zu durchsinken. Wegen der grossen Tiefe wird die Fallgeschwindigkeit bald dem Grenzwerthe k sehr nahe kommen. Es ist (Gl. 21)

$$k^2 = 324 \cdot 0{,}3 = 97{,}2, \quad \text{also}$$

$$k = 9{,}86$$

und die Zeit, wegen nahezu gleichmässiger Bewegung,

$$t_2 = 8000 : 9{,}86 = 811^{\,\mathrm{s.}} = 13^1/_2{}^{\,\mathrm{min.}}.$$

d) Übergang zur widerstandslosen Bewegung.

Der einfache Fall, in welchem nur die Schwere wirkt, lässt sich aus den vorstehenden Untersuchungen ableiten. Soll nämlich der Widerstand W zu Null werden, so muss in Gl. 1 die für W massgebende Grösse $k = \infty$ gesetzt werden. Dabei liefern dann die Gleichungen 3, 4, 5, 6, 7, 9 bis 14 Ergebnisse, die zunächst in unbestimmten Formen $\infty \cdot 0$ und $\frac{0}{0}$ auftreten, aber nach den Lehren der Differentialrechnung oder durch sonstige geeignete Umformung in die einfachen Gleichungen der gleichförmig beschleunigten Bewegung übergeführt werden können. Es möge dies beispielsweise an Gl. 4 durchgeführt werden:

Mit wachsendem k, also abnehmendem $\frac{c}{k}$ verschwindet mehr und mehr der Unterschied zwischen dem Bogen $\frac{c}{k}$ und seiner Tangente, so dass $\operatorname{arc\,tg} \frac{c}{k}$ mit $\frac{c}{k}$ vertauscht werden kann. Somit wird aus Gl. 4:

$$t_1 = \frac{k}{g} \cdot \frac{c}{k} = \frac{c}{g},$$

wie es sein muss.

Durch entsprechende Behandlung gehen die übrigen Gleichungen für $k = \infty$ über in:

Gl. 5) $x = \frac{c^2 - v^2}{2g}$,

Gl. 6) $h = \frac{c^2}{2g}$,

Gl. 7) $x = \frac{ct}{2}$,

Gl. 9) $h = \frac{v_1^2}{2g}$,

Gl. 10) $v_1 = \sqrt{2gh}$,

Gl. 11) $v_1 = c$,

Gl. 12) $t = \frac{v}{g}$,

Gl. 13) $t_2 = \frac{v_1}{g}$,

Gl. 14) $t_2 = \frac{c}{g}$,

Gl. 15) $x = \frac{g t^2}{2}$.

B. Freie krummlinige Bewegung eines Massenpunktes.

Eine krummlinige Bewegung entsteht, wenn Kraftrichtung und Geschwindigkeitsrichtung nicht übereinstimmen.

Die Bewegung eines Punktes im Raum ist bestimmt durch die Bewegungen seiner Projektionen auf drei Achsen. Diese Projektionsbewegungen nennt man auch Seitenbewegungen. Ist R die auf den Massenpunkt wirkende Mittelkraft, p die Beschleunigung, also $R = mp$, sind X, Y und Z die Projektionen von R auf die drei Achsen oder die Seitenkräfte in der Richtung der Achsen, p_x, p_y, p_z die entsprechenden Beschleunigungen, d. h. die Projektionen von p auf die Achsen, so sind diese nach S. 6 zugleich die Beschleunigungen der drei Seiten- oder Projektionsbewegungen. D. h., wenn x, y, z die veränderlichen Koordinaten des Punktes, es ist

$$p_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d v_x}{dt} = \frac{X}{m};$$

$$p_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d v_y}{dt} = \frac{Y}{m};$$

$$p_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d v_z}{dt} = \frac{Z}{m}.$$

Es liegt dann die Aufgabe vor, hieraus durch Integration die Gleichungen der Projektionsbewegungen $x = f(t)$ u. s. w. zu entwickeln.

Zur Erleichterung der Ausführung der Rechnungen in bestimmten Fällen dienen einige allgemeine Sätze, bei deren Ableitung diejenigen Schritte ein für alle Mal gemacht werden, die man ohne diese Sätze in jedem besonderen Falle thun müsste.

I. Der Satz der Flächen.

Dieser Satz gilt nur für solche Bewegungen, bei denen die wirkende Kraft stets durch einen festen Punkt, das Centrum O, hindurchgeht.

Zunächst ist leicht zu erkennen, dass eine solche Bewegung in einer ebenen Bahnlinie erfolgen muss, dass sie nicht aus der durch die Anfangsgeschwindigkeit c und das Centrum O bestimmten Ebene E heraustreten kann. Da nämlich (Fig. 79) die Geschwindigkeit c und auch die Kraft K, mithin auch die Elementarbeschleunigung $p \cdot dt$ in der Ebene E liegen, so wird die Geschwindigkeit nach einem Zeittheilchen, welche die geometrische Summe von c und $p \cdot dt$ ist, auch in der Ebene E liegen, und da dieser Vorgang sich für jedes weitere Zeittheilchen in gleicher Weise abspielt, so bleibt die Geschwindigkeit v stets in der Ebene E. Man kann nun durch O zwei zu einander rechtwinklige, ebenfalls in der Ebene E liegende Achsen OX und OY ziehen, dann bleibt die Bewegung gänzlich in der Ebene XOY, und man bedarf der dritten Achse OZ gar nicht bei der Untersuchung solcher Bewegungen.

Fig. 79.

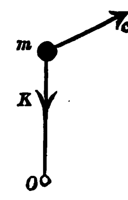
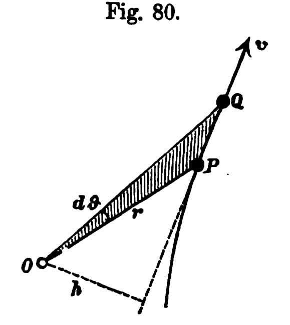


Fig. 80.



Ist nun PQ (Fig. 80) ein unendlich kleines Bewegungstheilchen $ds = v \cdot dt$ und bezeichnet man den rechtwinkligen Abstand des Centrums O von der Richtung der Geschwindigkeit v mit h, so ist leicht einzusehen, dass $v \cdot h$ konstant sein muss. Denn haben v und h zu Anfang die Werthe v_0 und h_0, so ist v die Resultirende oder die geometrische Summe aus v_0 und den Elementarbeschleunigungen $p \cdot dt$, welche während der Bewegung vom Anfange bis zu der Stelle P durch die Kraft K

geliefert wurden. Da nun nach 1. Theil, S. 101 der Satz der Drehmomente auch für Geschwindigkeiten gilt und die Elementarbeschleunigungen sämmtlich durch O gehen, also in Bezug auf O das Moment Null haben, so muss

$$-vh = -v_0 h_0 \quad \text{oder} \quad vh = v_0 h_0 \quad \text{sein.}$$

Zieht man nun die Fahrstrahlen OP und OQ, bezeichnet $\measuredangle POQ$ mit $d\vartheta$, die Fläche POQ mit dF, so ist

$$dF = {}^1/_2\, PQ \cdot h = {}^1/_2\, v \cdot dt \cdot h = {}^1/_2\, v_0 h_0 \cdot dt, \quad \text{mithin}$$

$$\frac{dF}{dt} = {}^1/_2\, v_0 h_0, \quad \text{d. h. konstant.}$$

Setzt man $v_0 h_0 = v \cdot h = A$, so wird

$$1) \qquad \frac{dF}{dt} = \frac{A}{2} \quad \text{und} \quad dF = \frac{A}{2} dt,$$

d. h. in jedem Zeittheilchen dt wird von dem Fahrstrahl OP eine mit dt verhältnisgleiche Fläche dF beschrieben, folglich auch in gleichen endlichen Zeiten gleiche Flächen. Daher hat man den Satz:

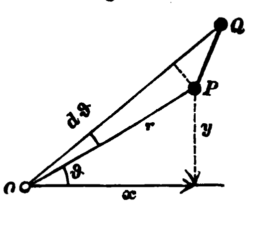
Bei Bewegungen, bei denen die Kraft stets durch ein festes Centrum geht, liegt die Bahnlinie in der durch das Centrum und die Anfangsgeschwindigkeit bestimmten Ebene, und die von dem Centrum nach dem beweglichen Massenpunkte gezogenen Fahrstrahlen beschreiben in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Die Fläche POQ kann mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung

$$2) \qquad dF = {}^1/_2\, r^2 \cdot d\vartheta$$

geschrieben werden (Fig. 81). Will man diese Grösse durch die rechtwinkligen Koordinaten x und y des Punktes P ausdrücken, so bedenke man, dass

Fig. 81.



$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x}, \quad \text{also} \quad \vartheta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

mithin

$$d\vartheta = d\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\right) = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{\frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2 + y^2}$$

$$3) \qquad \text{und} \quad r^2 d\vartheta = x \cdot dy - y \cdot dx \quad \text{wird.}$$

Im Anschluss an die Bezeichnung $ds:dt$ = Geschwindigkeit und $\omega = d\alpha:dt$ = Winkelgeschwindigkeit, nennt man $dF:dt$, d. h. die in der Zeiteinheit beschriebene Fahrstrahl-Fläche, die Flächen-Geschwindigkeit. Eine Bewegung, bei der die Kraft stets durch ein festes Centrum geht, erfolgt also mit gleichbleibender Flächengeschwindigkeit. Der analytische Ausdruck dafür ist

$$4)\qquad \frac{dF}{dt} = \frac{r^2}{2}\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2}\frac{x\cdot dy - y\cdot dx}{dt} = \frac{A}{2},$$

wenn A eine Konstante bedeutet.

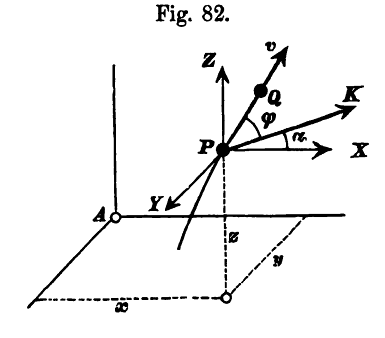
Dieser Satz rührt schon von Newton her. Ein Sonderfall ist das erste Kepler'sche Gesetz (S. 106).

2. Der Satz des Arbeitsvermögens. Kräftefunktion; Niveauflächen.

Der Satz des Arbeitsvermögens wurde freilich im 1. Theil, S. 48 schon allgemein bewiesen; er soll hier aber noch ein Mal in anderer Weise entwickelt und zu weiteren Schlüssen benutzt werden.

Zerlegt man die auf den Massenpunkt m wirkende Kraft K (Fig. 82) nach drei Achsenrichtungen in X, Y, Z und sind x, y, z die augenblicklichen Koordinaten von m, so ist

Fig. 82.



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X;$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y;$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bezw. mit dx, dy und dz und zählt sie zusammen, so entsteht

$$m\left\{\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt}\right\} = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Nun ist $$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt} = \frac{1}{2}d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

und weil $$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2},$$

so kann man obige Gleichung auch schreiben:

$$1)\qquad m\,d\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{m v^2}{2}\right) = X dx + Y dy + Z dz.$$

Die linke Seite ist die während der Zeit dt erfolgende Zunahme des Arbeitsvermögens (1. Theil, S. 44) des Punktes m, die rechte Seite aber die Summe der Arbeiten der drei Seitenkräfte X, Y und Z. Denn ist $PQ = ds$ das in der Zeit dt beschriebene Bahntheilchen, sind dx, dy, dz dessen Projektionen auf die Achsen, so ist nach 1. Theil, S. 42 $X \cdot dx$ die von X geleistete Arbeit. Im 1. Theil, S. 43 wurde schon bewiesen, dass die Arbeitssumme von X, Y und Z gleich der Arbeit der Mittelkraft K sei. Es ergiebt sich dies auch leicht in folgender Weise: Sind α, β und γ die Richtungswinkel von K gegen die Achsen, also

$$2)\qquad K\cos\alpha = X;\quad K\cos\beta = Y;\quad K\cos\gamma = Z;$$

sind ferner α_1, β_1 und γ_1 die Richtungswinkel von ds oder v, d. h.

$$3)\qquad ds\cdot\cos\alpha_1 = dx;\quad ds\cdot\cos\beta_1 = dy;\quad ds\cdot\cos\gamma_1 = dz;$$

und nennt man φ den Winkel, welchen K mit ds (oder v) einschliesst, so gilt (vergl. 2. Theil, S. 226)

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cdot\cos\alpha_1 + \cos\beta\cdot\cos\beta_1 + \cos\gamma\cdot\cos\gamma_1,$$

oder wenn man alle Glieder dieser Gleichung mit $K \cdot ds$ multiplicirt und die Gl. 2 und 3 benutzt:

$$4)\qquad K\cdot ds\cdot\cos\varphi = X\cdot dx + Y\cdot dy + Z\cdot dz,$$

mithin nach Gl. 1:

$$d\left(\frac{m v^2}{2}\right) = K\cdot ds\cdot\cos\varphi;$$

die rechte Seite ist die Arbeit der Kraft K, weil $ds \cdot \cos\varphi$ die in der Richtung von K zurückgelegte Wegeslänge bedeutet.

Hat der Punkt m an dem Orte x_0, y_0, z_0 die Geschwindigkeit v_0, an dem Orte x_1, y_1, z_1 die Geschwindigkeit v_1, so ergiebt sich für diese endliche Bewegung der Satz des Arbeitsvermögens

$$5)\qquad \frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \int X dx + Y dy + Z dz = \int K\cdot ds\cdot\cos\varphi.$$

Die Grenzen für die Integrationen auf der rechten Seite sind durch Anfangs- und Endlage des Punktes m bedingt. Gl. 5 ist

offenbar der Satz des Arbeitsvermögens (der kinetischen Energie oder der lebendigen Kraft), d. h. es ist die Zunahme des Arbeitsvermögens gleich der verrichteten Arbeit.

Es werde nun die Voraussetzung gemacht, dass 1. die Kraft K und somit auch ihre Seitenkräfte reine Funktionen des Ortes seien, also jedes Mal wieder denselben Werth annehmen, so oft der Punkt m sich wieder an demselben Orte befinde und dass 2. die Seitenkräfte X, Y und Z die theilweisen (partiellen) Abgeleiteten einer Funktion U nach bezw. x, y und z darstellen, d. h.

$$6)\qquad X = \frac{\delta U}{\delta x}; \quad Y = \frac{\delta U}{\delta y}; \quad Z = \frac{\delta U}{\delta z}.$$

Dann ist U auch eine reine Funktion des Ortes, und es lässt sich das Arbeitstheilchen

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\delta U}{\delta x}dx + \frac{\delta U}{\delta y}dy + \frac{\delta U}{\delta z}dz$$

schreiben, d. h. als das vollständige (totale) Differential einer Funktion U darstellen und $= dU$ setzen. Unter dieser Voraussetzung wird aus Gl. 1:

$$7)\qquad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dU, \quad \text{daher}$$

$$8)\qquad \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int dU = U_1 - U_0,$$

wenn U_0 und U_1 diejenigen Werthe der Funktion U sind, welche dem Anfangs- bezw. dem Endorte des Punktes m entsprechen. Die Funktion U, welche den Gl. 6 genügt, heisst **Kräftefunktion.** Entspricht der wirkenden Kraft eine Kräftefunktion, so ist die Zunahme des Arbeitsvermögens eines Punktes m gleich dem Unterschiede der beiden, der Anfangs- und Endlage entsprechenden Werthe dieser Funktion.

U_0 ist derjenige besondere Werth, den die Kräftefunktion $U = f(x, y, z)$ annimmt, wenn man in dieselbe die Koordinaten x_0, y_0, z_0 der Anfangsstelle des Punktes m einsetzt, d. h. es ist $U_0 = f(x_0, y_0, z_0)$. Ausser diesem Anfangspunkte der Bewegung giebt es aber noch unendlich viele andere Punkte im Raume, deren Koordinaten der Kräftefunktion den gleichen Werth U_0 geben.

Der Inbegriff oder Ort aller dieser Punkte ist eine Fläche, die wir auch U_0 nennen wollen und deren Gleichung

9) $$f(x, y, z) = U_0 \quad \text{ist.}$$

Hätte z. B. die Kräftefunktion die einfache Form $U = x^2 + y^2 + z^2$ und wäre für den Anfang $x_0 = 1$; $y_0 = 2$; $z_0 = 3$, so würde $U_0 = 14$. Setzt man aber

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14,$$

so ist dies die Gleichung einer Kugelfläche vom Halbmesser $\sqrt{14}$; die Koordinaten eines jeden Punktes dieser Kugelfäche genügen der Gleichung derselben, geben also der Funktion U den gleichen Wert 14. Hat der Punkt m zu Ende der Beobachtung die Koordinaten $x_1 = 10$; $y_1 = 12$; $z_1 = 13$, so wird $U_1 = 413$, und

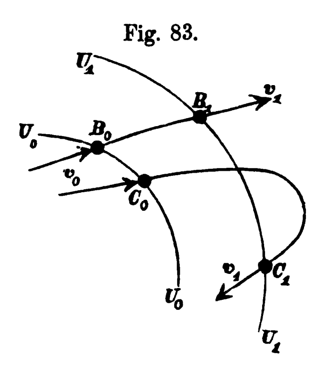
$$x^2 + y^2 + z^2 = 413$$

ist die Gleichung einer Kugelfläche U_1 vom Halbmesser $r_1 = \sqrt{414}$, deren Koordinaten der Funktion U den Werth $U_1 = 413$ geben. Die Gleichungen der Flächen U_0 und U_1 unterscheiden sich nur durch die Konstante U_0 bezw. U_1; die Flächen gehören derselben Gattung an, sind nämlich Kugelflächen mit gemeinsamem Mittelpunkte.

Ebenso sind U_0 und U_1 bei beliebiger Form der Kräftefunktion Flächen derselben Art und unterscheiden sich nur durch die Konstante U_0 bezw. U_1.

In Fig. 83 mögen die krummen Linien $U_0 U_0$ und $U_1 U_1$ die Durchschnittslinien zweier solchen Flächen U_0 und U_1 mit irgend einer anderen Fläche bedeuten. Bewegt sich ein Massenpunkt m unter Einwirkung einer Kraft K, der die Kräftefunktion U entspricht, auf verschiedenen Bahnlinien $B_0 B_1$ und $C_0 C_1$, so ändert sich das Arbeitsvermögen stets um den gleichen Werth $U_1 - U_0$, wenn der Punkt von irgend einer Stelle der Fläche U_0 zu irgend einer Stelle der Fläche U_1 gelangt. Hatte er beim Durchschneiden der Fläche U_0 die Geschwindigkeit v_0, so gilt für die Geschwindigkeit v_1, mit der er die Fläche U_1 erreicht, die Gl.:

Fig. 83.



$$\frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = U_1 - U_0.$$

Kehrt er aber bei seiner Bewegung zur Fläche U_0 zurück, so hat er auch wieder die Geschwindigkeit v_0.

Verlässt der Massenpunkt bei seiner Bewegung die Fläche U_0 gar nicht, beschreibt er vielmehr irgend eine in dieser Fläche liegende Bahn, so bleibt seine Geschwindigkeit stets v_0, es wird also die Arbeit der Kraft K für jedes Bewegungstheilchen Null, d. h.

$$K \cdot ds \cdot \cos\varphi = 0, \quad \text{also}$$

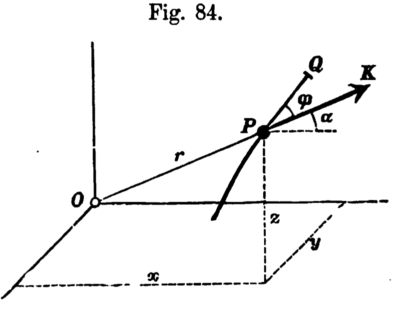
$$\cos\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \varphi = {}^1/_2\,\pi.$$

Dies bedeutet, dass die Kraft K zu jeder in der Fläche U_0 befindlichen Bahnlinie, also auch zu der Fläche U_0 selbst rechtwinklig steht. Gleiches gilt von der Fläche U_1. Diese Flächen U_0 und U_1 heissen **Niveauflächen.**

Lässt sich das Arbeitstheilchen der Kraft K als das vollständige Differential einer Funktion U darstellen, so giebt es für K eine Kräftefunktion, nämlich U, und auch durch jeden Punkt des Raumes, für welchen K noch einen endlichen Werth hat, eine Niveaufläche. Diejenigen Linien, welche alle Niveauflächen rechtwinklig schneiden, heissen Kraftlinien. Die möglichen Richtungen von K bilden Tangenten an die Kraftlinien.

Bei Centralbewegungen giebt es eine Kräfte-Funktion. Unter Centralbewegungen versteht man solche, bei denen die wirkende Kraft stets durch einen festen Punkt, das Centrum O, hindurchgeht, während zugleich die Grösse der Kraft eine Funktion der Entfernung des Punktes vom Centrum O, des sog. Fahrstrahls, ist. Ist die Kraft $K = F(r)$ und geht ihre Richtung stets durch O (Fig 84), so ist bei einer unendlich kleinen Bewegung PQ die in der Kraftrichtung zurückgelegte Wegeslänge, d. h. die Projektion von PQ auf die Richtung von r, einfach dr, daher das Arbeitstheilchen

Fig. 84.



$$K \cdot ds \cdot \cos\varphi = K \cdot dr = F(r) \cdot dr.$$

Da dies eine Differentialfunktion von nur **einer** Veränderlichen ist, so ist es ein **vollständiges** Differential, man kann es daher schreiben

$$dU = K \cdot dr, \quad \text{also ist}$$

$$U = \int K \cdot dr + C \tag{10}$$

die Kräftefunktion einer Centralbewegung.

Man überzeugt sich auch leicht, dass $X = \frac{\partial U}{\partial x}$. Denn, da U als eine $f(r)$ gefunden, so wird

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{dr}{dx} = K \cdot \frac{dr}{dx};$$

aus $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ wird aber

$$\frac{dr}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = K \cdot \frac{x}{r} = K \cos \alpha = X.$$

Die Kraftlinien sind vom Centrum nach allen Richtungen ausgehende geradlinige Strahlen. Da diese Kraftlinien von den Niveauflächen rechtwinklig geschnitten werden müssen, so sind letztere offenbar **Kugelflächen** mit dem gemeinsamen Mittelpunkt O.

In dem besonderen Falle der nach Grösse und Richtung überall gleichen Schwere ist, wenn man die z-Achse lothrecht abwärts nimmt, das Arbeitstheilchen von der Grösse

$$mg \cdot dz,$$

d. h. ein vollständiges Differential dU, und es wird

$$U = mg \cdot z + C$$

die Kräftefunktion. Da die Kraftlinien sämmtlich parallel der z-Achse sind, so müssen die Niveauflächen wagerechte Ebenen sein.

Sobald jedoch Reibungs- und Mittelwiderstände auftreten, die stets entgegengesetzt der Bewegungsrichtung wirken, sich also mit der Umkehrung der Bewegung ebenfalls umkehren, giebt es keine Kräftefunktion, also auch keine Niveauflächen.

3. Bewegung eines Massenpunktes unter Wirkung einer von einem Centrum ausgehenden, mit der Entfernung von diesem verhältnisgleichen Anziehungskraft.

Da diese Bewegung eine Centralbewegung ist, so muss sie nach S. 84 in einer ebenen Bahnlinie erfolgen, die daher auf nur zwei Achsen OX und OY bezogen werden braucht. Der Punkt befinde sich (Fig. 85) zu Anfang an der auf der OY befindlichen Stelle A im Abstand $OA = y_0$ vom Centrum O und habe eine beliebig gerichtete Anfangsgeschwindigkeit c, welche in c_x und c_y zerlegt werden kann. Da c nicht mit der Kraftrichtung AO zusammenfällt, so muss nach S. 83 eine krummlinige Bewegung entstehen. Dieser Fall ist eine Verallgemeinerung der S. 53 behandelten geradlinigen Schwingung, in so fern die Anziehungskraft K demselben Gesetz unterworfen ist. Wir drücken deshalb K auch wieder in derselben Weise

$$1) \qquad \boldsymbol{K = m \cdot k^2 \cdot r}$$

aus, so dass k^2 die Beschleunigung im Abstand Eins von dem Centrum bedeutet.

Da die Seitenkräfte von K in der Richtung der beiden Achsen im Sinne dieser Achsen negativ sind, so wird in der x-Richtung die Beschleunigung

Fig. 85.

$$p_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2r \cdot \cos\vartheta = -k^2x,$$

weil $r\cos\vartheta = x$ ist. Entsprechendes gilt für die y-Richtung. Die beiden Beschleunigungsgleichungen

$$2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y$$

lassen sich in diesem Falle ganz unabhängig von einander integriren. Wir bedürfen hier der allgemeinen Lösung der Differentialgleichungen 2 und müssen deshalb etwas anders verfahren als auf S. 54. $\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x$ multipliciren wir auf beiden Seiten mit $2\,dx$ und schreiben

$$2\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt} = -2k^2 \cdot x \cdot dx.$$

Dies giebt, integrirt:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -k^2x^2 + e^2,$$

wo e^2 die noch unbestimmt gelassene Integrations-Konstante bedeutet. Trennung der Veränderlichen führt auf

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{e^2 - k^2x^2}} = \frac{1}{k} \frac{d\left(\frac{kx}{e}\right)}{\sqrt{1 - \frac{k^2x^2}{e^2}}}$$

mit

$$t = \frac{1}{k} \operatorname{arc\,sin} \frac{kx}{e} + \frac{\alpha}{k},$$

worin $\frac{\alpha}{k}$ wieder eine Integrations-Konstante bedeutet. Letztere Gleichung lässt sich umschreiben in

$$\frac{k}{e} x = \sin(kt - \alpha) \quad \text{oder}$$

$$x = \frac{e}{k} \sin(kt - \alpha) = \frac{e}{k} \sin kt \cdot \cos \alpha - \frac{e}{k} \cos kt \cdot \sin \alpha$$

oder, wenn man die noch unbestimmten Konstanten

$$\frac{e}{k} \cos \alpha \quad \text{und} \quad \frac{e}{k} \sin \alpha$$

mit A bezw. $-B$ vertauscht:

3) $$x = A \sin kt + B \cos kt$$

und ebenso für die andere Achsenrichtung

4) $$y = C \sin kt + D \cos kt.$$

Die noch unbestimmten Werthe A, B, C und D müssen aus dem Anfangszustand ermittelt werden. Für $t = 0$ ist

$$x = 0; \qquad y = y_0;$$
$$v_x = c_x; \qquad v_y = c_y.$$

Aus Gl. 3 und 4 ergiebt sich aber durch Differentiation:

5) $$v_x = \frac{dx}{dt} = Ak \cdot \cos kt - Bk \cdot \sin kt,$$

6) $$v_y = \frac{dy}{dt} = Ck \cdot \cos kt - Dk \cdot \sin kt.$$

Setzt man in die Gl. 3—6 die Anfangswerthe mit $t = 0$ ein, so erhält man

$$0 = A \cdot \sin 0 + B \cdot \cos 0, \quad \text{d. h.} \quad 0 = B \cdot 1 \quad \text{oder} \quad B = 0;$$

$$y_0 = C \cdot 0 + D \cdot 1, \quad \text{d. h.} \quad D = y_0;$$

$$c_x = A \cdot k \cdot 1 - 0 \cdot k \cdot 0, \quad \text{d. h.} \quad A = \frac{c_x}{k};$$

$$c_y = C \cdot k \cdot 1 - D \cdot k \cdot 0, \quad \text{d. h.} \quad C = \frac{c_y}{k}.$$

Hiermit geben Gl. 3 und 4 die bestimmten Bewegungsgleichungen

7) $$x = \frac{c_x}{k} \cdot \sin kt,$$

8) $$y = \frac{c_y}{k} \cdot \sin kt + y_0 \cdot \cos kt.$$

Um die Gleichung der Bahnlinie zu erhalten, also t zu entfernen, muss man Gl. 7 und 8 nach $\sin kt$ und $\cos kt$ auflösen, beide quadriren und die Summe der Quadrate mit 1 vertauschen. Es wird aus Gl. 7:

$$\sin kt = \frac{k}{c_x} \cdot x$$

und, mit Einführung dieses Werthes in Gl. 8, aus dieser

$$\cos kt = \frac{y}{y_0} - \frac{c_y}{k \cdot y_0} \cdot \sin kt = \frac{y}{y_0} - \frac{c_y}{c_x \cdot y_0} \cdot x; \quad \text{mithin}$$

$$1 = \frac{k^2 x^2}{c_x^2} + \left(\frac{y}{y_0} - \frac{c_y}{c_x \cdot y_0} \cdot x\right)^2.$$

Dies giebt, geordnet:

9) $$x^2 (k^2 y_0^2 + c_y^2) + y^2 c_x^2 - 2 xy\, c_x c_y = c_x^2 y_0^2.$$

Diese Gleichung zweiten Grades bedeutet eine Kegelschnittlinie, u. zw., da

$$(k^2 y_0^2 + c_y^2) c_x^2 - (c_x \cdot c_y)^2 = k^2 y_0^2 c_x^2 + c_x^2 \cdot c_y^2 - c_x^2 \cdot c_y^2$$
$$= k^2 y_0^2 c_x^2 > 0,$$

eine Ellipse; da in Gl. 9 Glieder mit x und y allein in der ersten Potenz nicht vorkommen, so fällt der Mittelpunkt der elliptischen Bahnlinie mit dem Centrum O zusammen; nur liegen, wegen des

mit $x \cdot y$ behafteten Gliedes, die Hauptachsen $2a$ und $2b$ der Ellipse schief gegen das Achsenkreuz, was durch die schiefe Richtung der Anfangsgeschwindigkeit c verursacht wird (Fig. 86).

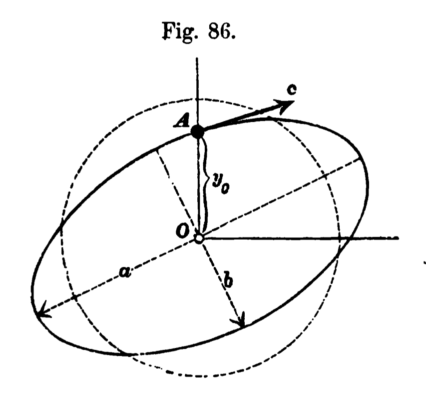


Fig. 86.

In der gekrümmten Bahnlinie kann die Geschwindigkeit an keiner Stelle Null werden, weil an einer solchen Stelle die Bewegung in eine geradlinige, nach O gerichtete übergehen müsste, was aber der elliptischen Bahnlinie widersprechen würde. Die Ellipse muss also in dem gleichen Umfahrungssinne fortwährend durchlaufen werden. Die Zeit eines Umlaufes ist

10) $$t_1 = \frac{2\pi}{k},$$

weil x, y, v_x und v_y nach der Gl. 3—6 stets wieder dieselben Werthe annehmen, wenn sich der Winkel kt um 2π, also t um $2\pi : k$ geändert hat.

Die Umlaufszeit nach Gl. 10 entspricht der Dauer einer Doppelschwingung nach S. 55. Für $y_0 = 0$, d. h. für den Fall, dass der Punkt m in der Gleichgewichtslage, dem Centrum, die Geschwindigkeit c bekommt, geht die Gl. 9 in die Gleichung einer geraden, mit der Richtung von c zusammenfallenden Linie

$$y = \frac{c_y}{c_x} \cdot x \quad \text{über.}$$

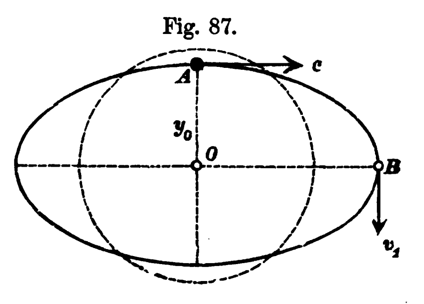


Fig. 87.

Für den einfacheren Fall, dass die Anfangsgeschwindigkeit c im Punkt A parallel der OX ist (Fig. 87), also $c_x = c$, $c_y = 0$, geht Gl. 9 über in

$$x^2 k^2 y_0^2 + y^2 c^2 = y_0^2 c^2 \quad \text{oder}$$

11) $$\frac{x^2}{\left(\frac{c}{k}\right)^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, bezogen auf ihre Hauptachsen mit den Halbachsen

$$a = \frac{c}{k} = OB \quad \text{und} \quad b = y_0 = OA.$$

Für diese Centralbewegung giebt es eine Kräftefunktion, welche nach Gl. 10, S. 91

$$U = -mk^2 \int r \cdot dr + C = -\frac{mk^2r^2}{2} + C$$

sein muss. Das Minuszeichen ist dadurch begründet, dass die Kraft K auf S. 90 nach aussen gerichtet angenommen war, hier aber den Sinn nach dem Centrum hat, so dass bei zunehmendem r eine negative Arbeit geleistet wird. Hiernach ist die Gleichung des Arbeitsvermögens nach Gl. 8, S. 88

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = -\frac{mk^2}{2}(r^2 - y_0^2)$$

und daher die Geschwindigkeit an beliebiger Stelle

$$12) \qquad v = \sqrt{c^2 - k^2(r^2 - y_0^2)}.$$

Von den Niveaukugeln (S. 91) kommen nur die Grösstkreise als Niveaukreise in Betracht. An den vier Schnittpunkten der Bahnlinie mit einem solchen (in Fig. 86 und 87 punktirten) Kreise hat der Punkt m die gleiche Geschwindigkeit. Je mehr er sich vom Centrum entfernt, desto kleiner wird seine Geschwindigkeit. Ist in dem Falle der Fig. 87 $a = \frac{c}{k} > y_0$, also $c > k \cdot y_0$, so ist a die grössere Halbachse. Am Endpunkte derselben, bei B, herrscht eine Geschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{c^2 - k^2a^2 + k^2y_0^2} = k \cdot y_0,$$

weil $c^2 = a^2k^2$; es ist also, wenn man y_0 mit b vertauscht,

$$c = k \cdot a \quad \text{und} \quad v_1 = k \cdot b,$$

d. h. die Geschwindigkeit am Ende der einen Halbachse ist verhältnisgleich mit der Länge der anderen Halbachse. Es ist in dem Falle der Fig. 87 c die grösste, v_1 die kleinste Geschwindigkeit.

Soll die Bewegung in einem Kreise vom Halbmesser y_0 und daher auch mit gleichbleibender Geschwindigkeit erfolgen, so muss, weil $c = k \cdot a$ ist und $a = y_0$ werden soll, $c = k \cdot y_0$ gemacht werden.

Diese Bewegung kommt, wenigstens annäherungsweise, vor, wenn die Kraft K durch den nach allen Richtungen gleichen Biegungswiderstand eines geraden elastischen Stabes von kreisförmigem Querschnitte geliefert wird. Der Stab sei unten lothrecht eingespannt (Figur 88) und trage oben eine Kugel, die so schwer ist, dass dagegen die Masse des Stabes vernachlässigt werden kann. Bringt man die Kugel um $y_0 = OA$ aus der Gleichgewichtslage O und ertheilt ihr etwa mit der Hand oder mittels eines Hammers eine Geschwindigkeit c in wagerechter Ebene, so wird der Mittelpunkt der Kugel die behandelte Ellipsenbewegung ausführen. Lässt man die Kugel einfach los ($c = 0$), so schwingt sie in einem schwachen Bogen AOC, und ihre wagerechte Seitenbewegung folgt annähernd den Gesetzen der geradlinigen Schwingung (S. 53).

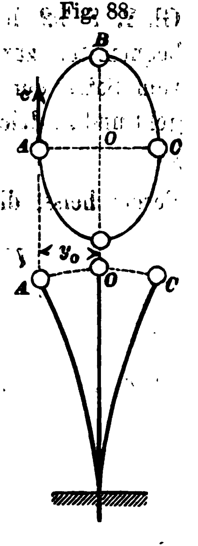


Fig. 88.

4. Bewegung der Himmelskörper unter Einwirkung der Massenanziehung nach dem Newton'schen Gesetze.

Für eine von einem Centralpunkt m_1 angezogene Masse m im Abstand r vom Centrum kann man (nach 1. Theil, S. 55) die Anziehungskraft

$$1)\qquad K = \frac{k \cdot m_1 m}{r^2} = \frac{m q}{r^2}$$

Fig. 89.

schreiben. Darin bedeutet k die Anziehungskraft zwischen zwei Masseneinheiten in dem Abstand $r = 1$, q die Anziehungsbeschleunigung der Masse m im Abstand $r = 1$ vom Centrum. Zerlegt man (Fig. 89) K in $K \cos \vartheta$ und $K \sin \vartheta$, so wird weil $r \cdot \cos \vartheta = x$, $r \cdot \sin \vartheta = y$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -q \frac{x}{r^3}; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -q \frac{y}{r^3}$$

oder mit $r^2 = x^2 + y^2$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -q \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -q \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Diese Gleichungen lassen sich, weil sie beide x und y enthalten, nicht von einander unabhängig integriren, wie dies mit Gl. 2, S. 92 leicht geschehen konnte. Vielmehr gelangt man am bequemsten zur Gleichung der Bahnlinie, wenn man unmittelbar vom Satze der Flächen und vom Satze des Arbeitsvermögens ausgeht und zugleich Polarkoordinaten anwendet. Es ist nach Gl. 4, S. 86

2) $$r^2 \cdot d\vartheta = A \cdot dt.$$

Ferner heisst die Kräftefunktion dieses Falles nach Gl. 10. S. 91

$$U = \int K dr + C = -k m_1 m \int \frac{dr}{r^2} + C$$

$$= \frac{k \cdot m_1 m}{r} + C = \frac{mq}{r} + C.$$

Ist zu Anfang $r = r_0$ und $v = v_0$, so wird nach Gl. 8, S. 88

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mq}{r} - \frac{mq}{r_0}, \text{ also}$$

$$v^2 = \frac{2q}{r} - \left(\frac{2q}{r_0} - v_0^2\right),$$

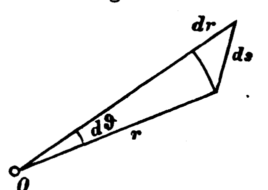
oder, wenn man den konstanten Werth

$$\frac{2q}{r_0} - v_0^2 = h \text{ setzt:}$$

3) $$v^2 = \frac{2q}{r} - h.$$

Gl. 2 und 3 müssen nun so umgewandelt werden, dass man aus ihnen nach Entfernung von t die Differentialgleichung der Bahnlinie erhält.

Fig. 90.



Es ist (Fig. 90)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2, \text{ also}$$

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}{dt^2};$$

führt man hierin aus Gl. 2 den Werth $dt = \frac{r^2}{A} d\vartheta$ ein, so wird mit Benutzung von Gl. 3:

$$\frac{2q}{r} - h = \frac{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}{r^4 d\vartheta^2} \cdot A^2,$$

oder, nach $d\vartheta$ aufgelöst:

4) $$d\vartheta = \frac{A \cdot dr}{\sqrt{2qr^3 - hr^4 - A^2 r^2}}.$$

Zum Zwecke der Integration, setzt man $r = \frac{1}{u}$ mit $dr = -\frac{du}{u^2}$, dann wird $d\vartheta = -\frac{A \cdot du}{u^2\sqrt{\frac{2q}{u^3} - \frac{h}{u^4} - \frac{A^2}{u^2}}} = -\frac{A \cdot du}{\sqrt{2qu - h - A^2u^2}}$.

Um das Glied mit der ersten Potenz der Veränderlichen im Nenner zu entfernen, setze man $u = z + b$; dann wird

$$2qu - h - A^2u^2 = 2qz + 2qb - h - A^2z^2 - 2bA^2z - A^2b^2.$$

Man wählt nun b derartig, dass $2qz - 2bA^2z = 0$ werde, d. h.

5) $$b = \frac{q}{A^2} \quad \text{und} \quad z = u - \frac{q}{A^2}.$$

Hiermit wird

$$2qu - h - Au^2 = \frac{2q^2}{A^2} - h - A^2z^2 - \frac{q^2}{A^2} \quad \text{und}$$

$$d\vartheta = -\frac{A\,dz}{\sqrt{\left(\frac{q^2}{A^2} - h\right) - A^2z^2}}.$$

Hieraus folgt das unbestimmte Integral

$$\vartheta = \arccos\frac{Az}{\sqrt{\frac{q^2}{A^2} - h}} = \arccos\frac{\frac{A^2}{q}z}{\sqrt{1 - h\frac{A^2}{q^2}}},$$

also wegen $$z = u - \frac{q}{A^2} = \frac{1}{r} - \frac{q}{A^2}:$$

$$\vartheta - \alpha = \arccos\frac{\frac{A^2}{qr} - 1}{\sqrt{1 - h\frac{A^2}{q^2}}},$$

worin α die Integrationskonstante bedeutet. Wird diese Gleichung nach r aufgelöst, so erhält man

6) $$r = \frac{\frac{A^2}{q}}{1 + \sqrt{1 - \frac{hA^2}{q^2}} \cdot \cos(\vartheta - \alpha)}.$$

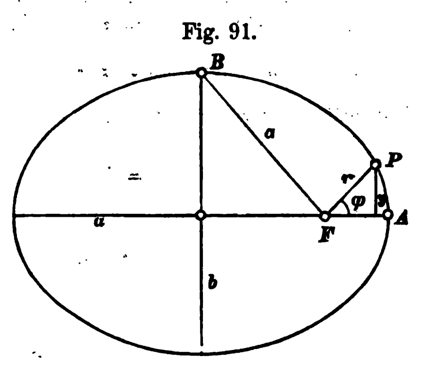
Dies ist die Polargleichung eines auf seinen Brennpunkt F als Pol bezogenen Kegelschnittes.

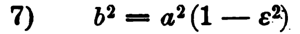
Geht man nämlich von der Mittelpunktsgleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

aus, so findet man (Fig. 91) den Brennpunkt F, indem man $BF = a$ macht. Der Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkte wird bekanntlich $= d \cdot \varepsilon$ gesetzt und ε die numerische Excentricität des Kegelschnitts genannt (für den Kreis würde $\varepsilon = 0$ sein). Hiermit und mit

Fig. 91.





7) $\quad b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$

wird die Mittelpunktsgleichung

8) $\quad y^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$.

Ist nun F der Pol, FA die Polarachse, so gilt für einen Punkt P, dessen Polarkoordinaten φ und r sind,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{y^2 + (x - a\varepsilon)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - a^2\varepsilon^2 - x^2 + \varepsilon^2 x^2 + x^2 - 2a\varepsilon x + a^2\varepsilon^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 2a\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2} = a - \varepsilon x; \end{aligned}$$

da ferner $\qquad x = a \cdot \varepsilon + r \cdot \cos\varphi,$

so wird $\qquad r = a - a \cdot \varepsilon^2 - \varepsilon \cdot r \cos\varphi,\quad$ also

9) $$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\varphi} = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

Der Zähler $a(1 - \varepsilon^2)$ ist nämlich die dem Brennpunkt F entsprechende Ordinate und werde mit p bezeichnet; denn $x = a\varepsilon$ giebt nach Gl. 8:

$$y = a(1 - \varepsilon^2).$$

Bei der Ellipse ist b reell, daher $b^2 > 0$, also nach Gl. 7

$$(1 - \varepsilon^2) > 0, \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon^2 < 1.$$

Die Hyperbel unterscheidet sich von der Ellipse dadurch, dass b imaginär, b^2 negativ, nach Gl. 7 somit

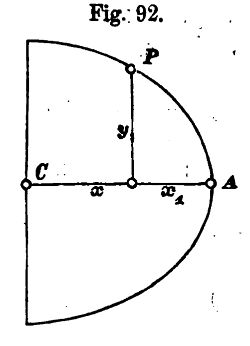
$$(1 - \varepsilon^2) < 0, \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon^2 > 1 \text{ ist.}$$

Lässt man ε^2 durch stetige Änderung von Werthen < 1 zu Werthen > 1 übergehen, so hat man in dem Zwischenwerth

$$\varepsilon^2 = 1$$

den Übergangsfall zwischen Ellipse und Hyperbel, der als Grenzfall sowohl der Ellipse wie der Hyperbel zugerechnet werden kann. Damit nun für $\varepsilon^2 = 1$ der Brennstrahl r in Gl. 9 nicht zu Null werde, muss offenbar $a = \infty$ sein. Daher ist die Parabel derjenige Kegelschnitt, dessen Excentricität $\varepsilon = 1$ und dessen grosse Halbachse a unendlich gross ist.

Fig. 92.



Dass hierfür thatsächlich die Ellipsengleichung in die Parabelgleichung übergeht, ergiebt sich leicht; nur muss man, damit der Anfangspunkt der Koordinaten nicht in unendliche Ferne gehe, die Scheitelgleichung der Ellipse benutzen. Vertauscht man (Fig. 92) in

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

x mit $a - x_1$, b^2 mit $a^2(1 - \varepsilon^2)$, so wird

$$\frac{(a - x_1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)} = 1$$

und daraus $\quad y^2 = 2a(1 - \varepsilon^2)x_1 - (1 - \varepsilon^2)x_1^2.$

Soll dies in die Scheitelgleichung der Parabel $y^2 = 2px$ übergehen, so muss

$$\varepsilon^2 = 1 \quad \text{und} \quad a(1 - \varepsilon^2) = p, \quad \text{d. h.} \quad a = \infty \quad \text{werden.}$$

Gl. 9 bezeichnet daher eine

$$10)\quad \begin{cases} \text{Ellipse, wenn} & 1 - \varepsilon^2 > 0, \\ \text{Parabel, „} & 1 - \varepsilon^2 = 0, \\ \text{Hyperbel, „} & 1 - \varepsilon^2 < 0. \end{cases}$$

Es lässt sich nun zeigen, dass Gl. 6 mit Gl. 9 im Wesentlichen übereinstimmt. Bei Gl. 6 fällt die Polarachse nicht mit der grossen Halbachse a der Ellipse zusammen, sondern liegt um den Winkel α dagegen verdreht. Denn nicht für $\vartheta = 0$, sondern für $\vartheta = \alpha$

erreicht $\cos(\vartheta - \alpha)$ seinen grössten Werth, daher r seinen kleinsten Werth FA. Vertauscht man (Fig. 93) $\vartheta - \alpha$ mit φ, so ist die Uebereinstimmung zwischen den Gl. 6 und 9 hinsichtlich der Veränderlichen erreicht.

Die Bedeutung der Konstanten der Gl. 6 für die Bahnlinie der entsprechenden Bewegung ergiebt sich nun, wenn man

Fig. 93.

11) $$\frac{A^2}{q} = a(1 - \varepsilon^2); \quad 1 - \frac{hA^2}{q^2} = \varepsilon^2$$

setzt; aus beiden folgt

12) $$a = \frac{q}{h} \quad \text{und}$$

13) $$1 - \varepsilon^2 = h\frac{A^2}{q^2}.$$

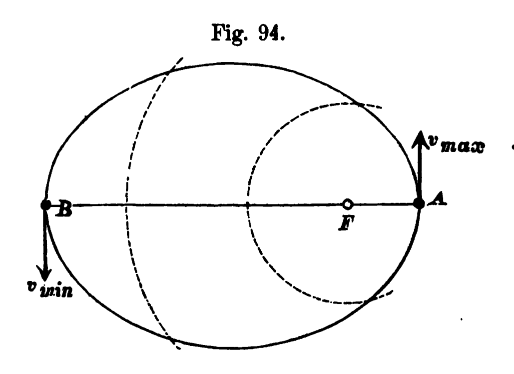
Da $\frac{A^2}{q^2}$ stets positiv, so ist $1 - \varepsilon^2 \gtreqless 0$ wenn $h \gtreqless 0$ ist.

Nach Gl. 3 war nun aber $h = \frac{2q}{r} - v^2$, so dass das Vorzeichen von h, also auch dasjenige von $1 - \varepsilon^2$, abhängt von $2q - rv^2$. Eine elliptische Bahnlinie verlangt $1 - \varepsilon^2 > 0$, d. h. $h > 0$, also $2q > v^2 r$. Da nun $q = k \cdot m_1$ für einen gegebenen Centralpunkt eine konstante Grösse ist, so darf der Massenpunkt in einem Abstand r vom Centrum nur eine solche Geschwindigkeit v haben, dass $rv^2 < 2q$ ist, wenn eine elliptische Bahnlinie entstehen soll. Damit die Bahnlinie aber im Besonderen kreisförmig werden könne, muss die Anziehungs-Beschleunigung $\frac{q}{r^2}$ der erforderlichen Centripetalbeschleunigung $\frac{v^2}{r}$ gleich sein, d. h. $rv^2 = q$. Für $rv^2 = 2q$ wird $h = 0$, $\varepsilon^2 = 1$, die Bahnlinie eine Parabel; für $rv^2 > 2q$ wird $h < 0$, $\varepsilon^2 > 1$, die Bahnlinie eine Hyperbel; oder, zusammengestellt, die Bahnlinie wird

14) $$\left\{ \begin{array}{lll} \text{ein Kreis} & \text{für} & v^2 r = q, \\ \text{eine Ellipse} & \text{„} & v^2 r < 2q, \\ \text{„ Parabel} & \text{„} & v^2 r = 2q, \\ \text{„ Hyperbel} & \text{„} & v^2 r > 2q. \end{array} \right.$$

Bekommt also der Massenpunkt m in einem Abstand r vom Centrum die Geschwindigkeit v etwa durch einen Stoss, eine Explosion oder dergl. so hängt es nur von der Grösse der Geschwindigkeit ab, ob er eine geschlossene Ellipse mit dem Centrum als Brennpunkt beschreibt, oder in einer hyperbolischen Bahnlinie in unendliche Ferne geht. Diese Fälle einer elliptischen Bahnlinie unterscheiden sich von der auf S. 92 behandelten elliptischen Bewegung dadurch, dass das Centrum dort den Mittelpunkt, jetzt aber den einen Brennpunkt der Ellipse bildet, dass also die Niveaukreise eine völlig andere Lage gegen die Bahnlinie haben (vergl. Fig. 94 mit Fig. 87). Da

Fig. 94.



$$v^2 = \frac{2q}{r} - h$$

(Gl. 3) ist, so wird die Geschwindigkeit am grössten für r_{min}, d. h. in der Centrumsnähe bei A, am kleinsten für r_{max}, d. h. in der Centrumsferne bei B.

Umlaufszeit.

Die Zeit, in welcher die elliptische Bahnlinie einmal durchlaufen wird, ergiebt sich einfach aus dem Satze der Flächen, Gl. 4, S. 86:

$$dF = {}^1/_2 A \cdot dt, \quad \text{daher}$$

$$F = {}^1/_2 A \cdot t \quad \text{oder}$$

$$t = \frac{2F}{A},$$

wenn F die ganze während eines Umlaufes von dem Fahrstrahle beschriebene Fläche der Ellipse ist. Da nun $F = a \cdot b \cdot \pi$; $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ und nach Gl. 11 $A = \sqrt{aq(1-\varepsilon^2)}$, so wird

$$15) \qquad t = \frac{2a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\pi}{\sqrt{aq(1-\varepsilon^2)}} = 2\pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{q}}.$$

Der Mittelpunkt der Erde als Centrum.

Jeder Punkt ausserhalb der Erde erfährt von dieser eine Anziehungkraft, welche nach Gl. 1

$$K = \frac{mq}{r^2}$$

zu setzen ist. Nennen wir nun den Halbmesser der Erde R, so wird für $r = R$ die Kraft $K = mg$, dem Gewicht eines Massenpunktes an der Erdoberfläche. Daraus folgt $mg = \frac{mq}{R^2}$, d. h.

$$16)\qquad q = g R^2$$

für die Erde als Centralkörper.

Hat ein Massenpunkt m in der Nähe der Erdoberfläche, d. h. für $r = R$, eine Geschwindigkeit v, so führt er eine Bewegung in einer Kegelschnittlinie aus, deren einer Brennpunkt in dem Erdmittelpunkte liegt. Da für diesen Fall

$$\frac{q}{r} = \frac{g R^2}{R} = g R = 9{,}81 \cdot 6\,370\,000 = 62\,490\,000,$$

so wird die Bahnlinie nach Gl. 14

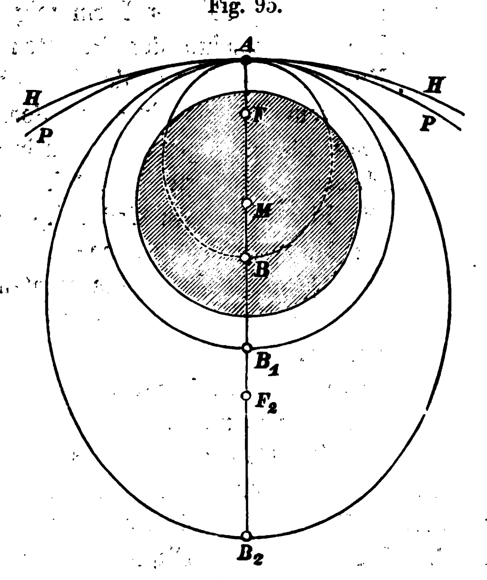
$$17)\left\{\begin{array}{lll} \text{ein Kreis} & \text{für } v = \sqrt{gR} = 7\,905 \text{ m/s.} & \text{(vergl. S. 57);} \\ \text{eine Ellipse} & \text{„ } v < \sqrt{2gR} = 11\,179 \text{ m/s.;} & \\ \text{„ Parabel} & \text{„ } v = \sqrt{2gR} = 11\,179 \text{ m/s.;} & \\ \text{„ Hyperbel} & \text{„ } v > \sqrt{2gR} = 11\,179 \text{ m/s..} & \end{array}\right.$$

Die gewöhnlichen Wurfbewegungen geschehen hiernach in Ellipsen, und zwar befindet sich der entferntere Brennpunkt im Mittelpunkte M der Erde (Fig. 95), während der andere Brennpunkt F in geringer Tiefe unter dem Anfangspunkt A der Bewegung liegt.

Hiernach ist die Wurfbewegung, die im 1. Theil, S. 48 als parabolisch bezeichnet wurde, richtiger eine elliptische zu nennen. Betrachtet man aber, wie es dort geschah, die Fallbeschleunigung als unveränderlich nach Grösse und Richtung, so wird dadurch der Erdhalbmesser als unendlich gross gegenüber der Länge der Bahnlinie eingeführt; dann ist auch die Halbachse a der Ellipse unendlich, und es wird die Ellipse nach S. 101 gleichbedeutend mit der Wurfparabel.

Wird die wagerecht gedachte Anfangsgeschwindigkeit grösser und grösser, so rückt der Brennpunkt F mehr und mehr nach M hin und fällt bei $v = 7905$ mit ihm zusammen; in diesem Fall ist die Bahnlinie der Kreis AB_1. Bei weiterer Zunahme von v rückt F über M hinaus, etwa nach F_2, und der Erdmittelpunkt M ist der dem Ausgangspunkt A nähere Brennpunkt der elliptischen Bahnlinie, welche sich nun bei B_2 weit von der Erde entfernen kann, aber immer noch wieder nach A zurückführt. Eine parabolische und hyperbolische Bahnlinie PAP und HAH für $v \geqq 11179$ sind in der Figur ebenfalls angedeutet.

Fig. 95.



Der Mittelpunkt der Sonne als Centrum.

Die Bewegung der Planeten und Kometen des Sonnensystems erfolgt unter Einwirkung einer von der Sonne ausgehenden Anziehungskraft $K = mq : r^2$. Weil nun allgemein (s. 1. Theil, S. 55)

$$18)\qquad K = k\frac{m m_1}{r^2} = \frac{mq}{r^2}$$

ist, so muss mit m_1 als Sonnenmasse,

$$q = k m_1,$$

d. h. nur von der Sonnenmasse abhängig sein. Mithin ist für alle die Sonne umlaufenden Planeten und Kometen q eine und dieselbe Grösse. Sind daher für zwei dieser Himmelskörper, deren Bahnlinien geschlossene Kurven bilden, a und a_1 die Halbachsen der Ellipsen, t und t_1 ihre Umlaufszeiten, so wird nach Gl. 15

$$19)\qquad \frac{t}{t_1} = \frac{a^{3/2}}{a_1^{3/2}}; \quad \frac{t^2}{t_1^2} = \frac{a^3}{a_1^3}.$$

Die vorstehenden Ergebnisse enthalten die von Kepler (geb. 1571 in Weil (Württemberg), gest. 1630 in Regensburg) im Jahre 1618 aufgestellten Gesetze der Planetenbewegung, welche in etwas abgeänderter Form folgendermafsen lauten:

1. Die Mittelpunkte der Planeten bewegen sich in ebenen Kurven, deren Ebenen durch den Sonnen-Mittelpunkt gehen; der vom Mittelpunkte der Sonne nach dem Mittpunkte eines Planeten gezogen gedachte Fahrstrahl beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
2. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, deren einer Brennpunkt der Mittelpunkt der Sonne ist.
3. Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der grossen Halbachsen ihrer Bahnen.

Das erste Gesetz sagt aus, dass die Planeten Centralbewegungen ausführen mit der Sonne als Centralkörper (s. S. 85).

Das zweite Gesetz folgt aus der Annahme einer mit r^2 umgekehrt proportionalen Anziehungskraft. Für die auf S. 92 behandelte Bewegung, bei der K mit r direkt proportional war, ergab sich zwar auch eine elliptische Bahn, doch lag dort das Centrum im Mittelpunkte der Ellipse, während es jetzt in dem einen Brennpunkte sich befindet.

Das dritte Gesetz ist der Inhalt der Gl. 19, welche entstand, indem man q für alle Planeten als von gleicher Grösse annahm.

Kepler folgerte diese Gesetze aus seinen und Tycho de Brahe's (geb. 1546 in Knudstrup (Dänemark), gest. 1601 in Prag) Beobachtungen und gab damit eine Beschreibung der vorhandenen Bewegungen, die er aus den sehr verwickelten scheinbaren Bewegungen in Bezug auf die Erde abgeleitet hatte. Die mechanische Entwickelung erfolgte erst 67 Jahre später durch Newton, der eben aus den nach den Kepler'schen Gesetzen erfolgenden Bewegungen die Ursache derselben, nämlich die Massenanziehung nach Gl. 18 folgerte.

Verhältnis der Masse der Sonne zu der eines Planeten.

Gl. 15 giebt die Möglichkeit, die Masse der Sonne mit derjenigen eines Planeten zu vergleichen, falls letzterer von einem Mond umkreist wird. Beziehen sich nämlich q, a und t auf den

Umlauf eines Mondes um seinen Planeten, q_1, a_1 und t_1 auf den Umlauf des Planeten um die Sonne, so ist nach Gl. 15

$$t^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{q}; \quad t_1{}^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{a_1{}^3}{q_1}; \quad \text{daher}$$

$$\frac{q_1}{q} = \left(\frac{t}{t_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_1}{a}\right)^3; \tag{20}$$

das gleiche Verhältnis gilt nach Gl. 18 auch für die Massen der Centralkörper, d. h. der Sonne und des Planeten.

Die grosse Halbachse a_1 der Erdbahn ist 398,87 mal so gross wie die grosse Halbachse a der Mondbahn; die Umlaufszeit der Erde ist $t_1 = 365{,}26$ Tage, die des Mondes $t = 27{,}32$ Tage. Hiermit wird

$$\frac{q_1}{q} = \left(\frac{27{,}32}{365{,}26}\right)^2 \cdot 398{,}87^3 = 355\,000,$$

d. h. die Masse der Sonne ist 355 000 mal so gross wie die der Erde.

Für die Erde als Centralkörper war $q = g \cdot R^2 = 9{,}81 \cdot 6370000^2$ (Gl. 16); für die Sonne als Centralkörper wird hiernach

$$q_1 = 355\,000 \cdot 9{,}81 \cdot 6\,370\,000^2 = 1\,413 \cdot 10^{17}.$$

Sollte die Erde in einem Abstand $r = 148\,472 \cdot 10^6$ Meter von der Sonne (dies ist etwa die grosse Halbachse der Erdbahn) sich kreisförmig bewegen, so müsste sie nach Gl. 14 eine Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{q_1}{r}} = \left(\frac{1413 \cdot 10^{17}}{148\,472 \cdot 10^6}\right)^{1/2} = 30\,850 \text{ m/s.}$$

haben. Diese Bedingung ist wirklich nahezu erfüllt, und daher ist die Bahn der Erde nur sehr wenig excentrisch; die beiden Achsen der Ellipse verhalten sich wie 7001 : 7000. Wäre die Geschwindigkeit $\sqrt{2}$ mal grösser, so würde die Bahnlinie nicht mehr geschlossen sein können.

Potential.

Die Kräftefunktion U solcher Kräfte, die nach dem Newton'schen Gesetze veränderlich sind, wird, unter Fortlassung der Konstanten C und mit negativem Vorzeichen genommen, im Besonderen das Potential V dieser Kräfte genannt. Nach S. 98 ist

$$U = \frac{k \cdot m_1 m}{r} + C, \quad \text{daher} \quad V = -\frac{k \cdot m_1 m}{r}.$$

Für $r = \infty$ wird $V = 0$.

Bewegt sich ein Massenpunkt m aus einem Abstand r vom Centrum m_1 in unendlich grosse Entfernung, so ist die dabei verrichtete Arbeit

$$U_\infty - U = 0 - \frac{k m_1 m}{r} = V.$$

Das Potential V der von einem Centrum m_1 ausgehenden Anziehungskraft ist daher diejenige Arbeit, welche von der Kraft geleistet wird, wenn der Massenpunkt m aus dem Abstand r sich in unendliche Entfernung begiebt. Nach welcher Richtung und auf welchem Wege diese Bewegung erfolgt, ist nach S. 89 gleichgültig.

Ist für die Anfangslage des beweglichen Punktes die Geschwindigkeit c, der Abstand r_0, das Potential V_0, für die Endlage die Geschwindigkeit v, der Abstand r, das Potential V, so ist

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m c^2}{2} = U - U_0 = V_0 - V, \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{m v^2}{2} + V = \frac{m c^2}{2} + V_0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{m v^2}{2} + V$$

eine unveränderliche Grösse.

Die Niveauflächen sind Flächen gleichen Potentials (s. S. 90).

5. Wurfbewegung mit Luftwiderstand.

Legt man durch die Anfangsgeschwindigkeit c der Bewegung eine lothrechte Ebene, nimmt in dieser die AX wagerecht, die AY lothrecht nach oben, so muss die Bewegung in der Ebene XAY (Fig. 96) erfolgen, weil dieselbe die Anfangsgeschwindigkeit, sowie auch die Kräfte mg und den Widerstand $W = mg \cdot v^2 : k^2$ enthält (s. S. 74).

Es ergiebt sich dann, wenn ϑ der Neigungswinkel der Bahn an beliebiger Stelle ist,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{W}{m}\cos\vartheta = -\frac{g}{k^2}v^2 \cdot \cos\vartheta$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{W}{m}\sin\vartheta = -g\left(1 + \frac{v^2}{k^2} \cdot \sin\vartheta\right).$$

Setzt man nun

$$v = \frac{ds}{dt}; \quad \cos\vartheta = \frac{dx}{ds}; \quad \sin\vartheta = \frac{dy}{ds}, \quad \text{so wird}$$

1) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{k^2}\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt} \quad \text{und}$$

2) $$\frac{d^2y}{dt^2} = -g\left(1 + \frac{1}{k^2}\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt}\right).$$

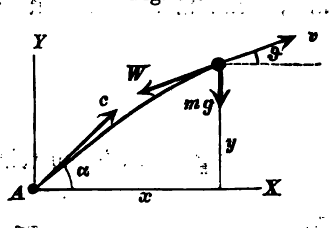


Fig. 96.

Schreibt man Gl. 1:

$$\frac{\left(\frac{d^2x}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = -\frac{g}{k^2}\,ds, \quad \text{so folgt}$$

$$\mathfrak{l}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{g}{k^2}s + \mathfrak{l}(c\cdot\cos\alpha) \quad \left(\text{weil } \frac{dx}{dt} = c\cdot\cos\alpha \text{ für } s = 0\right) \text{ und}$$

$$\mathfrak{l}\left(\frac{\frac{dx}{dt}}{c\cdot\cos\alpha}\right) = -\frac{g}{k^2}s, \quad \text{oder}$$

3) $$\frac{dx}{dt} = v_x = c\cdot\cos\alpha\cdot e^{-\frac{g}{k^2}s}.$$

Führt man für die weitere Behandlung die Hülfsgrösse

$$\varphi = \frac{dy}{dx}$$

ein, so wird aus $dy = \varphi\cdot dx$, wenn man nach dt differentiirt und bedenkt, dass φ und dx beide von t abhängen;

$$d^2y = \varphi\cdot d^2x + dx\cdot d\varphi, \quad \text{also}$$

4) $$\frac{d^2y}{dt^2} = \varphi\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}.$$

Aus Gl. 2 wird aber, wenn man auch darin $dy = \varphi\cdot dx$ setzt:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{g}{k^2}\frac{ds}{dt}\varphi\cdot\frac{dx}{dt},$$

oder, weil nach Gl. 1:

$$-\frac{g}{k^2}\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}:$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g + \varphi\,\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Verbindet man dies mit Gl. 4, so erhält man

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

also, wenn man beiderseits mit $dx : dt$ dividirt:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{g}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

woraus wegen Gl. 3 entsteht:

$$5) \qquad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{g}{c^2 \cos^2 \alpha} \cdot e^{\frac{2g}{k^2}s}.$$

Die weitere Behandlung der Aufgabe ist nur mittels zeichnerischer Flächenermittelung oder mittels Hülfstabellen möglich. Ein näheres Eingehen auf diesen für die Militärwissenschaft sehr wichtigen Gegenstand liegt ausserhalb des Rahmens dieses Buches. Es möge hier auf das Compendium der theoretischen äusseren Ballistik, von Professor Dr. Cranz (Stuttgart), 1896, Verlag von B. G. Teubner (Leipzig) verwiesen werden.

Besonderer Fall einer flachen Wurfbahn.

Eine annähernde Lösung in geschlossener Form ergiebt sich für flache Wurfbahnen, bei denen man die Bogenlängen mit ihren wagerechten Projektionen vertauschen, also $ds = dx$; $s = x$; $\cos \alpha = 1$; $\cos \vartheta = 1$; $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$; $\operatorname{tg} \vartheta = \varphi = \vartheta$ setzen darf. Dann ergiebt Gl. 3:

$$6) \qquad v_x = \frac{dx}{dt} = c \cdot e^{-\frac{g}{k^2}x}, \quad \text{also}$$

$$dt = \frac{1}{c} \cdot e^{\frac{g}{k^2}x} \cdot dx \quad \text{und daraus}$$

$$7) \qquad t = \frac{k^2}{c \cdot g}\left(e^{\frac{g}{k^2}x} - 1\right), \quad \text{oder}$$

$$8) \qquad x = \frac{k^2}{g} \cdot \mathrm{l}\left(1 + \frac{g \cdot c}{k^2} t\right).$$

Aus Gl. 5 wird

$$d\varphi = d\vartheta = -\frac{g}{c^2} e^{\frac{2g}{k^2}x} dx \quad \text{und giebt}$$

9) $$\vartheta = \alpha - \frac{k^2}{2c^2}\left(e^{\frac{2g}{k^2}x} - 1\right);$$

daher $$dy = \vartheta \cdot dx = \alpha \cdot dx - \frac{k^2}{2c^2}\left(e^{\frac{2g}{k^2}x} - 1\right) dx$$

und durch Integration

10) $$y = x\left(\alpha + \frac{k^2}{2c^2}\right) - \frac{k^4}{4gc^2}\left(e^{\frac{2g}{k^2}x} - 1\right).$$

Setzt man $y = 0$ und $x =$ der Wurfweite l, so wird aus Gl. 10, wenn man nach dem Steigungswinkel α auflöst:

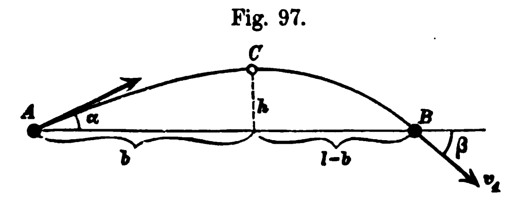
11) $$\alpha = \frac{k^4}{4g \cdot c^2 l}\left(e^{\frac{2g}{k^2}l} - 1\right) - \frac{k^2}{2c^2}.$$

Für den Scheitelpunkt C der Bahnlinie (Fig. 97) sei $x = b$, $y = h$; die Bedingung dafür ist $\vartheta = 0$; hiermit giebt Gl. 9, nach $x = b$ aufgelöst:

12) $$b = \frac{k^2}{2g} \mathfrak{l}\left(1 + \frac{2c^2}{k^2}\alpha\right).$$

Die Pfeilhöhe h der Wurfbahn findet man, indem man den Zahlenwerth von b in die Gl. 10 der Bahnlinie einsetzt; es ist dann $h = y$.

Fig. 97.



Die Zeiten t_1 und t_2, nach denen der Massenpunkt in C bezw. B angelangt ist, ergeben sich, wenn man in Gl. 7 für x die Werthe b bezw. l einführt.

Beispiel: Eine Kruppsche Kanone von 0,305 m lichter Weite, also 0,07306 qm Öffnungsquerschnitt, schiesst Granaten von 1 m Länge und 455 kg Gewicht. Die Granate hat eine annähernd kegelförmige Spitze, deren Kegelseite mit der Achse einen Winkel ε bildet, u. zw. ist ungefähr $\sin \varepsilon = 0{,}5$. Dann beträgt der Luftwiderstand nach 2. Theil, S. 356, Gl. 16 bei einer Geschwindigkeit v

$$W = 0{,}83 \frac{\gamma}{g} F v^2 \sin \varepsilon,$$

oder mit $\gamma = 1{,}2$; $F = 0.07306$; $\sin \varepsilon = 0{,}5$:

$$W = 0{,}00371 \cdot v^2.$$

Für $W = mg = 455$ wird $v = k$ (Gleichgewichtsgeschwindigkeit), also

$$k = \sqrt{\frac{455}{0{,}00371}} = 350 \text{ m/s.}$$

Für eine Wurfweite $l = 8460$ m sollen der Höhenwinkel (Steigungswinkel) α und die Einzelseiten der Bewegung berechnet werden, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $c = 630$ m/s.

Gl. 11 liefert für den Steigungswinkel $\alpha = 0{,}1746 =$ rund 10°, was mit dem Schiessversuch übereinstimmt. Für die Gesammtdauer t_2 des Wurfes giebt Gl. 7 mit $x = 8460$:

$$t_2 = 19{,}14 \text{ s.}$$

Die Geschwindigkeit $v = v_x$ bei B (Fig. 97) wird nach Gl. 6:

$$v_x = 630 \cdot e^{-\frac{gl}{k^2}} = 320 \text{ m/s.};$$

die Neigung β der Bahn nach Gl. 9:

$$\beta = -0{,}270 = -15{,}5^\circ.$$

Der Scheitelpunkt der Bahn liegt nach Gl. 12 um $b = 4521$ m vom Ausgangspunkt entfernt und nach Gl. 10 in einer Höhe $h = 462$ m. Die Zeit, nach welcher dieser Scheitelpunkt erreicht wird, beträgt nach Gl. 7: $t_1 = 9{,}12$ s.; der abfallende Theil der Bahnlinie von 3739 m wagerechter Projektion wird in $t_2 - t_1 = 10{,}02$ s. zurückgelegt.

C. Bewegung eines Massenpunktes auf vorgeschriebener Bahnlinie.

Bei den vorstehenden Untersuchungen war der Massenpunkt nur **gegebenen** Kräften unterworfen und führte unter deren Einwirkung mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit eine freie Bewegung aus. Ist der Massenpunkt aber mit festen, unbeweglichen Körpern in Berührung, die ihm für seine Bewegung eine bestimmte Bahnlinie vorschreiben, ihn auf diese beschränken, so kann man diesen Zwang, diese Einwirkung auf die Bewegung des Punktes, durch

eine Widerstandskraft ausdrücken. Nachdem diese Widerstandskraft an dem Massenpunkt angebracht ist, kann seine Bewegung wie eine freie Bewegung behandelt werden.

Der Widerstand der vorgeschriebenen Bahnlinie kann zerlegt werden in einen **Normalwiderstand** N (rechtwinklig zur Bahnlinie) (vergl. 1. Theil, S. 65) und eine tangential gerichtete Kraft, den **Reibungswiderstand** $f \cdot N$, dessen Sinn stets der Bewegung entgegengesetzt ist (vergl. 1. Theil, S. 190); darin bedeutet f die Reibungsziffer (den Reibungs-Koëfficienten).

Der Normalwiderstand N ist zunächst unbekannt hinsichtlich seiner Grösse, seiner Richtung innerhalb der zur Bahnlinie winkelrechten Ebene und seines Sinnes; er tritt in solcher Grösse und Richtung, in solchem Sinne auf, wie erforderlich ist, damit der Massenpunkt sich längs der vorgeschriebenen Bahn bewege. N ist daher von der Form der Bahnlinie, von den gegebenen bewegenden Kräften K und der Anfangsgeschwindigkeit abhängig.

Während in den Fällen der freien Bewegung sämmtliche Kräfte gegeben waren, die Form der Bahnlinie und die Bewegung in derselben gesucht wurden, so bleibt in den Fällen der Bewegung auf vorgeschriebener Bahn die Aufsuchung dieser letzteren natürlich fort; es sind aufzusuchen der Normalwiderstand N und das Gesetz der Bewegung längs der Bahn. Es ist dazu erforderlich, die Kräfte nach tangentialer und normaler Richtung zu zerlegen und die Werthe der Tangential- und Centripetalbeschleunigung (s. S. 7) zu benutzen.

1. Bewegung eines Massenpunktes längs einer in lothrechter Ebene befindlichen Kreislinie unter Berücksichtigung der Reibung.

Der Massenpunkt m habe im tiefsten Punkt A des Kreises (Fig. 98) die Geschwindigkeit c. An der durch den Winkel ϑ bestimmten Stelle P sei die Geschwindigkeit v; es wirken die Kräfte mg, N und, der Bewegung entgegen, $f \cdot N$.

Als gesammte Centripetalkraft ergiebt sich $N - mg \cos \vartheta$, als Tangentialkraft im Sinne der Bewegung $-mg \sin \vartheta - fN$.

Daher wird nach S. 7 $m \cdot p_t = - mg \sin\vartheta - fN$ oder

1) $p_t = \frac{dv}{dt} = -g \sin\vartheta - f\frac{N}{m}$;

$p_n = \frac{v^2}{r} = \frac{N}{m} - g\cos\vartheta$, also

$$\frac{N}{m} = \frac{v^2}{r} + g\cos\vartheta$$

Fig. 98.

und hiermit aus Gl. 1:

$$\frac{dv}{dt} = -g(\sin\vartheta + f\cos\vartheta) - f\frac{v^2}{r}.$$

Multiplicirt man mit

$$2v \cdot dt = 2ds = 2r \cdot d\vartheta,$$

so ergiebt sich die Gleichung

2) $$2v \cdot dv = -2gr(\sin\vartheta + f \cdot \cos\vartheta)d\vartheta - 2f \cdot v^2 d\vartheta,$$

aus der das Bewegungsgesetz entwickelt werden kann.

Setzt man behufs der Lösung vorübergehend

3) $$v^2 = y; \quad \vartheta = x,$$

so nimmt Gl. 2 die Form an:

$$\frac{dy}{dx} = -2gr(\sin x + f \cdot \cos x) - 2f \cdot y \quad \text{und mit}$$

4) $$2gr(\sin x + f \cdot \cos x) = X:$$

5) $$\frac{dy}{dx} = -X - 2fy.$$

Zur Integration dieser Gleichung wird

6) $$y = u \cdot v, \quad \text{also} \quad dy = u \cdot dv + v \cdot du$$

eingeführt, wodurch entsteht:

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} = -X - 2f \cdot u \cdot v, \quad \text{oder}$$

7) $$u\left(\frac{dv}{dx} + 2f \cdot v\right) + v\frac{du}{dx} = -X.$$

Man wählt nun den einen Faktor v in $u \cdot v = y$ derartig, dass in Gl. 7 das erste Glied verschwinde, d. h.

$$\frac{dv}{dx} = -2f \cdot v, \quad \text{was}$$

8) $$v = C \cdot e^{-2fx} \quad \text{bedingt.}$$

Dann wird aus Gl. 7:

$$du = -\frac{X \cdot dx}{v} = -\frac{X \cdot e^{2f \cdot x} dx}{C}, \text{ also}$$

9) $$u = C_1 - \frac{1}{C} \int e^{2f \cdot x} X \cdot dx;$$

und aus Gl. 6 mit Hülfe von Gl. 8 und 9:

$$y = u \cdot v = C \cdot C_1 \cdot e^{-2f \cdot x} - e^{-2f \cdot x} \int e^{2f \cdot x} \cdot X \cdot dx,$$

oder wenn man $C \cdot C_1 = A$ und für X den Werth (Gl. 4) wieder einführt:

10) $$y = A \cdot e^{-2f \cdot x} - 2gr \cdot e^{-2f \cdot x} \int (\sin x + f \cdot \cos x) e^{2f \cdot x} dx.$$

Die beiden, nach Auflösung der Klammer im letzten Gliede entstehenden Integrale ermittelt man durch sog. theilweise Integration. Um

$$\int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx$$

zu finden, setzt man vorübergehend

$$u_1 = e^{2f \cdot x}; \quad dv_1 = \sin x \cdot dx; \quad \text{dann ist}$$

$$du_1 = 2f \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx; \quad v_1 = -\cos x, \quad \text{daher}$$

11) $$\int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} \cdot dx = u_1 \cdot v_1 - \int v_1 \cdot du_1 = -\cos x \cdot e^{2f \cdot x} + 2f \int \cos x \cdot e^{2f \cdot x} dx.$$

Nunmehr wird geschrieben

$$u_2 = e^{2f \cdot x}; \quad dv_2 = \cos x \cdot dx; \quad \text{dann ist}$$

$$du_2 = 2f \cdot e^{2f \cdot x} dx; \quad v_2 = \sin x, \quad \text{mithin}$$

$$\int \cos x \cdot e^{2f \cdot x} dx = u_2 \cdot v_2 - \int v_2 \cdot du_2 = \sin x \cdot e^{2f \cdot x} - 2f \int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} dx.$$

Die Einführung dieser Gleichung in Gl. 11 ergiebt

$$\int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} dx = -\cos x \cdot e^{2f \cdot x} + 2f \cdot \sin x \cdot e^{2f \cdot x} - 4f^2 \int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} dx,$$

somit

12) $$\int \sin x \cdot e^{2f \cdot x} dx = \frac{e^{2f \cdot x}}{1 + 4f^2} (2f \cdot \sin x - \cos x).$$

In derselben Weise findet man

13) $$\int \cos x \cdot e^{2f \cdot x} dx = \frac{e^{2f \cdot x}}{1 + 4f^2} (2f \cdot \cos x + \sin x).$$

Mit Hülfe dieser Werthe wird Gl. 10, wenn man zugleich wieder y mit v^2, ϑ mit x vertauscht,

14) $$v^2 = e^{-2f \cdot \vartheta} \left\{ A + 2gr \frac{e^{2f \cdot \vartheta}}{1 + 4f^2} \left[(1 - 2f^2) \cos \vartheta - 3f \sin \vartheta \right] \right\}.$$

Setzt man zur Ermittelung von A die Geschwindigkeit $v = c$ für $\vartheta = 0$, also

$$c^2 = 1\left\{A + 2gr\frac{1}{1+4f^2}(1-2f^2)\right\},$$

so ergiebt sich $$A = c^2 - \frac{2gr}{1+4f^2}(1-2f^2),$$ also Gl. 14):

$$15)\qquad v^2 = \frac{2gr}{1+4f^2}\left\{(1-2f^2)\cos\vartheta - 3f\cdot\sin\vartheta\right\} + \left\{c^2 - \frac{2g\cdot r}{1+4f^2}(1-2f^2)\right\}e^{-2f\cdot\vartheta}.$$

So weit lässt sich die Aufgabe in einfacher Weise behandeln. Des Weiteren $v = r\cdot\frac{d\vartheta}{dt}$ zu setzen und daraus t als $f(\vartheta)$ zu entwickeln, ist in geschlossener Form nicht möglich.

Gl. 15 giebt die Geschwindigkeit v für jeden Werth von ϑ, d. h. für jede Stelle des Kreises. Auch kann man berechnen, wie gross die Anfangsgeschwindigkeit c genommen werden muss, damit der Punkt an einer bestimmten Stelle α mit der Geschwindigkeit Null anlange. Mit $v = 0$, $\vartheta = \alpha$ ergiebt nämlich Gl. 15;

$$16)\quad c^2 = \frac{2gr}{1+4f^2}\left\{1 - 2f^2 - \left[(1-2f^2)\cos\alpha - 3f\cdot\sin\alpha\right]e^{2f\cdot\alpha}\right\}.$$

$$\left(\text{Für } f = 0 \text{ wird } c^2 = 2gr(1-\cos\alpha).\right)$$

Soll der Punkt gerade noch den Punkt B (Fig. 98) erreichen, so wird mit $\alpha = 90^0$:

$$17)\qquad c_1^2 = \frac{2gr}{1+4f^2}\left\{1 - 2f^2 + 3f\cdot e^{f\pi}\right\},$$

während der Endpunkt C (mit $\alpha = \pi$) die Geschwindigkeit c_2 bedingt, wobei

$$18)\quad c_2^2 = \frac{2gr}{1+4f^2}\left\{1-2f^2+(1-2f^2)e^{2f\pi}\right\} = \frac{2gr}{1+4f^2}(1-2f^2)\left(1+e^{2f\pi}\right)$$

ist.

Der Massenpunkt erlangt bei der Abwärtsbewegung die ursprüngliche Geschwindigkeit nicht wieder, da die Reibung mit der Umkehrung des Bewegungssinnes ebenfalls ihren Sinn wechselt, d. h. keine Funktion des Ortes ist, keiner Kräftefunktion entspricht (s. S. 91).

Beispiel: Für $f = 0{,}1$ wird (Gl. 17)

$$c_1^2 = 1{,}337\cdot 2gr;\quad c_1 = 1{,}156\sqrt{2gr};$$

(Gl. 18) $$c_2^2 = 2{,}70\cdot 2gr = 1{,}35\,(4gr);\quad c_2 = 1{,}162\sqrt{4gr}.$$

2. Reibungslose Bewegung eines Massenpunktes unter Einwirkung der Schwere auf einer in lothrechter Ebene befindlichen Bahnlinie.

In diesem Falle verrichtet nur die Schwere eine Arbeit, so dass wagerechte Linien Niveaulinien darstellen (s. S. 91).

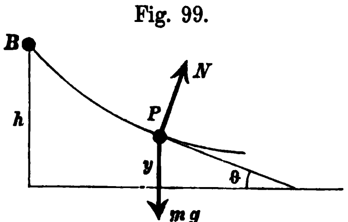


Fig. 99.

Liegt die Stelle B, an der die Bewegung mit der Geschwindigkeit Null begann, um h über der x-Achse, so gilt für die Geschwindigkeit v in der Höhe y:

$$v^2 = 2g(h - y).$$

Hat die Bahnlinie hier die Neigung ϑ gegen die Wagerechte, so muss

$$\frac{mv^2}{\varrho} = N - mg\cos\vartheta, \quad \text{also}$$

$$N = mg\cos\vartheta + \frac{2mg}{\varrho}(h - y) \quad \text{oder}$$

$$\text{I} \qquad N = mg\left(\cos\vartheta + 2\frac{h-y}{\varrho}\right) \quad \text{sein.}$$

Für die Bewegung findet man

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(h - y)}, \quad \text{also}$$

$$\text{II} \qquad dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{ds}{\sqrt{h - y}}.$$

3. Das Kreispendel.

Im 1. Theile wurde auf S. 76—78 der Normalwiderstand schon vollständig behandelt, die Schwingungsdauer aber nur für kleine Schwingungen; hier soll die Aufgabe auch für beliebig grosse Schwingungen durchgeführt werden (Fig. 100).

Es ist, weil bei der Bewegung von B nach C die Ordinate y abnimmt,

$$ds = -dy : \sin\vartheta,$$

$$\sin\vartheta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{y} \cdot \sqrt{2r - y},$$

Fig. 100.

daher (Gl. II):

$$dt = -\frac{r}{\sqrt{2g}}\,\frac{dy}{\sqrt{2r-y}\sqrt{hy-y^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\,\frac{dy}{\sqrt{hy-y^2}} \cdot \left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2}.$$

Ist nun t_1 die Zeit einer einfachen Schwingung, so wird der Weg BC in der Zeit $\frac{1}{2}t_1$ zurückgelegt, wofür gilt

$$\frac{t_1}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\int_h^0 \frac{dy}{\sqrt{hy-y^2}} \cdot \left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2}, \quad \text{oder}$$

1) $$t_1 = \sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^h \frac{dy}{\sqrt{hy-y^2}}\left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2}.$$

Der letzte Faktor wird nach der binomischen Reihe entwickelt:

$$\left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{y}{2r} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2}\left(\frac{y}{2r}\right)^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{y}{2r}\right)^3 + \cdots$$

oder $$\left(1 - \frac{y}{2r}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{y}{2r} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{y}{2r}\right)^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{y}{2r}\right)^3 + \cdots$$

Hiermit ergiebt sich aus Gl. 1 die Reihe von Integralen:

2) $$t_1 = \sqrt{\frac{r}{g}}\left\{\int_0^h \frac{dy}{\sqrt{hy-y^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2r}\int_0^h \frac{y\cdot dy}{\sqrt{hy-y^2}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{2r}\right)^2\int_0^h \frac{y^2 dy}{\sqrt{hy-y^2}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{1}{2r}\right)^3\int_0^h \frac{y^3 dy}{\sqrt{hy-y^2}} + \cdots\right\}.$$

Das erste dieser Integrale ist sehr leicht zu lösen:

$$\int_0^h \frac{dy}{\sqrt{hy-y^2}} = \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + hy - y^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}}$$

$$= \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{2} - y\right)^2}} = \int_0^h \frac{dy}{\frac{h}{2}\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2y}{h}\right)^2}}$$

$$= -\int_0^h \frac{d\left(1 - \frac{2y}{h}\right)}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2y}{h}\right)^2}} = \left[\arcsin\left(1 - \frac{2y}{h}\right)\right]_h^0$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin(-1) = 2 \cdot \arcsin 1$$

$$= \pi. \tag{3}$$

Die übrigen Integrale lassen sich auf das erste zurückführen.

Um $\frac{y^n\,dy}{\sqrt{hy-y^2}}$ zu integriren, theile man im Zähler und Nenner durch $\sqrt{y}$, so dass entsteht $\frac{y^{n-1/2}\,dy}{\sqrt{h-y}}$. Nun setze man

$$y^{n-1/2} = u; \quad \frac{dy}{\sqrt{h-y}} = dv, \quad \text{dann ist}$$

$$(n - 1/2) \cdot y^{n-3/2}\,dy = du;$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{h-y}} = -\int (h-y)^{-1/2} d(h-y) = -2\sqrt{h-y} = v, \quad \text{und es wird}$$

$$\int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{hy-y^2}} = uv - \int v \cdot du = -2y^{n-1/2}\sqrt{h-y}$$

$$+ (2n-1)\int \sqrt{h-y} \cdot y^{n-3/2}\,dy$$

$$= -2y^{n-1}\sqrt{hy-y^2} + (2n-1)\int \frac{(h-y)}{\sqrt{hy-y^2}} \cdot y^{n-1}\,dy$$

oder

$$\int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{hy-y^2}} = -2y^{n-1}\sqrt{hy-y^2} + (2n-1)h\int \frac{y^{n-1}\cdot dy}{\sqrt{hy-y^2}}$$

$$-(2n-1)\int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{hy-y^2}},$$

also, wenn man das letzte Glied auf die linke Seite bringt und durch $2n$ theilt:

$$\int \frac{y^n dy}{\sqrt{hy - y^2}} = -\frac{1}{n} y^{n-1} \cdot \sqrt{hy - y^2} + \frac{2n-1}{2n} \cdot h \int \frac{y^{n-1} \cdot dy}{\sqrt{hy - y^2}}.$$

Nimmt man dies zwischen den Grenzen 0 und h, so wird das erste Glied der rechten Seite Null, und man erhält

$$4) \qquad \int_0^h \frac{y^n \cdot dy}{\sqrt{hy - y^2}} = \frac{2n-1}{2n} \cdot h \int_0^h \frac{y^{n-1} \cdot dy}{\sqrt{hy - y^2}}.$$

Dies ist die allgemeine Zurückführungsformel für Gl. 2.

$n = 1$ giebt $\int_0^h \frac{y\,dy}{\sqrt{hy - y^2}} = \frac{1}{2} h \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}} = \frac{1}{2} h \cdot \pi$ nach Gl. 3.

$n = 2$ giebt $\int_0^h \frac{y^2 dy}{\sqrt{hy - y^2}} = \frac{3}{4} h \int_0^h \frac{y \cdot dy}{\sqrt{hy - y^2}} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} h^2 \pi.$

$n = 3$ giebt $\int_0^h \frac{y^3 dy}{\sqrt{hy - y^2}} = \frac{5}{6} h \int_0^h \frac{y^2 dy}{\sqrt{hy - y^2}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} h^3 \pi$

und so fort.

Hiermit wird Gl. 2:

$$5) \quad t_1 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{h}{2r} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\frac{h}{2r}\right)^3 + \cdots \right\}.$$

Der Quotient des $(n + 1)$ten Gliedes dieser Reihe durch das $n$te Glied ist

$$\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 \frac{h}{2r}.$$

Da dieser Ausdruck mit wachsendem n sich mehr und mehr dem unter der Einheit liegenden Grenzwerth $\frac{h}{2r}$ nähert, so ist die Reihe konvergent.

Durchläuft der Massenpunkt den ganzen unteren Halbkreis, ist also $h = r$, so wird

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{8} + \frac{9}{256} + \frac{225}{72 \cdot 256} + \cdots \right\},$$

oder in Decimalbrüchen:

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{ 1 + 0{,}125 + 0{,}0352 + 0{,}0122 + \cdots \right\}.$$

Dies giebt

$$t_1 = 1{,}180\,\pi \sqrt{\frac{r}{g}}. \tag{6}$$

Für nicht so grosse Schwingungen genügen die beiden ersten Glieder der Reihe in Gl. 5, nämlich

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{h}{r} \right); \tag{7}$$

für kleine Schwingungen ergiebt sich, wie im ersten Theile,

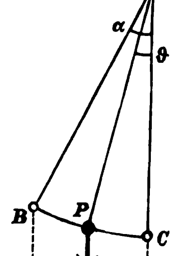
$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}. \tag{8}$$

Da $$\frac{h}{2r} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

kann man Gl. 5 auch schreiben

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \cdots \right\}.$$

Fig. 101.



Die Reihe liefert

für $\alpha = 1^0$ den Werth 1,000019,
„ $\alpha = 5^0$ „ „ 1,000476,
„ $\alpha = 10^0$ „ „ 1,001907,
„ $\alpha = 20^0$ „ „ 1,007670.

Betrachtet man für kleine Schwingungen die kreisförmige Bahnlinie als übereinstimmend mit ihrer Horizontalprojektion (Fig. 101), so ist, weil die Tangentialbeschleunigung

$$p_t = g \sin\vartheta = g \cdot \frac{x}{r}$$

beträgt, aber im Sinne einer Abnahme von x gerichtet ist,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{r} \cdot x.$$

Da dies mit Gl. 2, S. 53 übereinstimmt, wenn man

$$k^2 = g : r$$

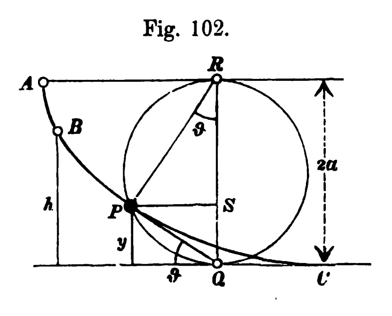
setzt, so ist eine Pendel-Bewegung von geringem Ausschlage nach den Gesetzen einer geradlinigen Schwingungsbewegung zu betrachten; man erhält für die Dauer einer einfachen Schwingung nach Gl. 7, S. 55 auch auf diese Weise

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

4. Das Cykloidenpendel.

Ist der Massenpunkt gezwungen, sich unter Einwirkung der Schwere auf einer Cykloide zu bewegen (Fig. 102), so nennt man die Vorrichtung ein Cykloidenpendel. Die Cykloide ABC sei dadurch entstanden, dass der Kreis vom Halbmesser a auf der oberen Wagerechten AR rollt. In B sei die Geschwindigkeit Null gewesen; zu beliebiger Zeit t befinde sich der Punkt in P. Dann ist (vergl. S. 20), wenn QR den lothrechten Durchmesser des erzeugenden Kreises bezeichnet, PQ die Tangente, PR die Normale der Cykloide.

Fig. 102.



Um zunächst den Normalwiderstand N zu finden, bedenke man, dass (S. 41) der Krümmungshalbmesser der Cykloide $\varrho = 2\,PR$ ist, also weil

$$PR = \sqrt{RQ \cdot RS} = \sqrt{2\,a(2\,a - y)} \quad \text{und}$$

$$\text{1)} \qquad \cos\vartheta = \frac{PR}{QR} = \frac{\sqrt{2\,a(2\,a - y)}}{2\,a} = \sqrt{\frac{2\,a - y}{2\,a}},$$

nach Gl. I, S. 117 stattfindet:

$$N = mg\left\{\frac{\sqrt{2\,a - y}}{\sqrt{2\,a}} + \frac{h - y}{\sqrt{2\,a(2\,a - y)}}\right\},$$

$$\text{2)} \qquad N = mg\frac{h + 2(a - y)}{\sqrt{2\,a(2\,a - y)}}.$$

Für $y = h$ wird

$$N_0 = mg\sqrt{1 - \frac{h}{2a}};$$

begänne die Bewegung im Punkt A, so würde dort, mit $h = 2a$, $N_0 = 0$ sein.

Beim Kreispendel wird N am grössten im tiefsten Punkte (s. 1. Theil, S, 67), weil dort $\vartheta = 0$, v am grössten, ϱ überall gleich ist. Beim Cykloidenpendel aber ist im tiefsten Punkte ϱ am grössten, daher nicht ohne Weiteres selbstverständlich, dass dort N am grössten werden muss. Aus Gl. 2 wird nach entsprechender Vereinfachung

$$3)\qquad \frac{dN}{dy} = \frac{mg}{\sqrt{2a}} \frac{{}^1\!/\!_2\, h - 3a + y}{(2a - y)^{3/2}}.$$

Da der Nenner für den hier vorliegenden Fall $(y \leqq 2a)$ stets positiv, so ist

$$\frac{dN}{dy} \gtreqless 0, \quad \text{wenn} \quad \frac{h}{2} + y - 3a \gtreqless 0.$$

Da nun ${}^1\!/\!_2\, h \leqq a$ und auch $y \leqq 2a$, so wird überall $\frac{dN}{dy} < 0$, d. h. es wird mit abnehmendem y die Druckkraft N stetig grösser, und man erhält für $y = 0$

$$4)\qquad N_{max} = mg\left(1 + \frac{h}{2a}\right).$$

Zur Berechnung der Schwingungsdauer t_1 wird Gl. II, S. 117 mit

$$ds = -\frac{dy}{\sin\vartheta} \quad \text{und}$$

$$\sin\vartheta = \frac{PQ}{2a} = \frac{\sqrt{2a\cdot y}}{2a} = \sqrt{\frac{y}{2a}},$$

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{y}} \frac{dy}{\sqrt{h - y}} = -\sqrt{\frac{a}{g}} \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}},$$

also für die Bewegung von B bis C

$$\frac{t_1}{2} = -\sqrt{\frac{a}{g}} \int_h^0 \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}},$$

mithin die ganze Dauer einer Schwingung

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^h \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}}.$$

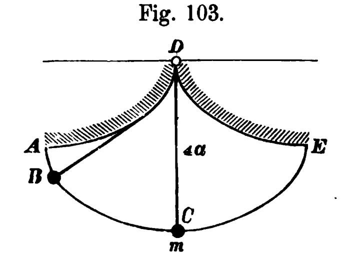
Das Integral hat nach Gl. 3, S. 119, den Werth π, daher kann man schreiben

5) $$t_1 = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}} = \pi\sqrt{\frac{4a}{g}},$$

d. h. die Schwingungsdauer eines gegebenen Cykloidenpendels ist völlig unabhängig von der Grösse des Schwingungsbogens, was beim Kreispendel nur für kleine Schwingungen gilt.

Dieses Pendel lässt sich am einfachsten dadurch verwirklichen, dass man (Fig. 103) zwei Cykloidenhälften vom Rollkreishalbmesser a als Schienen oder dergl. AD und DE körperlich ausbildet, in D einen unten mit einem dichten Körper m beschwerten biegsamen Faden von der Länge $4a$ befestigt und den Körper m in Bewegung setzt. Da die Evolvente der Cykloidenhälften AD und DE eine gleiche Cykloide ACE ist, so wird der Körper m in der Cykloide ACE schwingen, weil der in D befestigte Faden sich gegen die Evolute ADE legen wird. Die Fadenlänge $4a$ erscheint auch in Gl. 4 als Schwingungslänge.

Fig. 103.

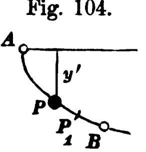


Professor Stampfer in Wien hat ein solches Cykloidenpendel für eine Thurmuhr der Stadt Lemberg verwendet. Diese Verwirklichung des Cykloidenpendels, überhaupt die Lehre von seinen Eigenschaften rührt schon von Huyghens (vergl. 1. Theil, S. 35) her, der die Lehre von den Evoluten und Evolventen, die Theorie der Kettenlinie begründete, die Theorie des Pendels ausbildete, auch die Optik und ihre Anwendung auf die Astronomie erheblich förderte.

Die Cykloide ist auch die Linie des schnellsten Falles zwischen zwei nicht in derselben Lothrechten befindlichen Punkten,

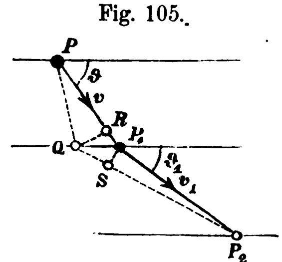
die sog. **Brachistochrone** (von $\beta\varrho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$ = kürzeste und $X\varrho\acute{o}\nu o\varsigma$ = Zeit), d. h. wenn ein schwerer Punkt in kürzester Zeit von A nach B gelangen soll (Fig. 104), so muss man ihn längs einer Cykloide APB gleiten lassen, deren Rollgerade eine durch A gelegte Wagerechte ist.

Fig. 104.



Dies lässt sich (nach Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte) in folgender Art beweisen: Ist die Kurve AB die Linie des schnellsten Falles zwischen den Punkten A und B, so muss sie es auch zwischen je zwei zwischenliegenden Punkten P und P_1 sein; man würde sonst den Bogen PP_1 der Kurve mit einem Stück einer anderen Kurve vertauschen können, auf welchem der Punkt in kürzerer Zeit von P nach P_1 gelangte, und in Folge dessen würde die Zeit der Bewegung von A nach B auf der ursprünglichen Kurve nicht die kürzeste sein.

Fig. 105.



Sind P, P_1, P_2 (Fig. 105) drei Nachbarpunkte der Kurve, ist v die Geschwindigkeit im Punkte P, v_1 diejenige im Punkte P_1, so kann man v für PP_1 und v_1 für P_1P_2 als gleichbleibend ansehen. Die Zeit zum Durchlaufen von PP_1P_2 ist dann

$$\frac{PP_1}{v} + \frac{P_1P_2}{v_1}.$$

Würde anstatt P_1 der Punkt Q derselben Wagerechten in unendlich kleinem Abstande dx von P_1 gewählt, so würde PQP_2 in der Zeit

$$\frac{PQ}{v} + \frac{QP_2}{v_1}$$

durchlaufen. Macht man $PR = PQ$, $P_2S = P_2P_1$, so kann man die beiden Zeiten auch schreiben

$$\frac{PP_1}{v} + \frac{P_2S}{v_1} \quad \text{und} \quad \frac{PR}{v} + \frac{QP_2}{v_1},$$

der Unterschied beträgt dann

$$\frac{P_1R}{v} - \frac{QS}{v_1} \quad \text{oder} \quad P_1Q\left(\frac{\cos\vartheta}{v} - \frac{\cos\vartheta_1}{v_1}\right),$$

wenn ϑ und ϑ_1 die Neigungswinkel der Bahnstrecken PP_1 und P_1P_2 gegen die Wagerechte sind. — Soll nun die Zeit zum Durchlaufen der Strecke PP_1P_2 ein Minimum sein, so muss die unendlich kleine Verschiebung des Punktes P_1 nach Q eine Aenderung der Zeit von der Grösse Null hervorbringen, d. h. es muss $\frac{\cos\vartheta}{v} = \frac{\cos\vartheta_1}{v_1}$, oder $\frac{\cos\vartheta}{v}$ überall gleich, die Geschwindigkeit v proportional dem Cosinus des Gefällwinkels ϑ der Kurve sein. Man setze also $\cos\vartheta = v \cdot \text{Const.}$ Zu Anfang, wo v noch $=$ Null ist, muss also auch $\cos\vartheta = 0$, d. h. $\vartheta = 90^0$ sein, d. h. die Kurve muss mit lothrechter Richtung beginnen. Es ist nun nach S. 117 $v = \sqrt{2gy'}$, wobei y' die durchsunkene Höhe, d. h. die Tiefe des beliebigen Punktes unter dem Anfangspunkt A der Bewegung bedeutet; es muss also

$$6)\qquad \cos\vartheta = \text{Const.}\sqrt{2gy'} = C_1\sqrt{y'}$$

sein. — Nach Gl. 1, S. 122, ist aber eine kennzeichnende Eigenschaft der Cykloide:

$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{2a-y}{2a}},$$

oder, wenn man nach dem Obigen die Tiefe des Punktes P in Fig. 104 unter der Stelle A, wo die Kurve lothrecht ist, mit y' bezeichnet, d. h. $2a - y = y'$ setzt,

$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{y'}{2a}},$$

was mit der nothwendigen Bedingung 6 der Brachistochrone übereinstimmt; mithin ist die durch die gegebenen Punkte A und B (Fig. 104) gelegte Cykloide mit der Spitze in A die Linie des schnellsten Falles zwischen A und B.

Fig. 106.

A, $a.\pi$, C, α, $2a$, B

Liegen z. B. die beiden Punkte A und B (Fig. 106) so gegen einander, dass man zwischen dieselben gerade eine halbe Cykloide legen kann mit $AC = a\pi$, $BC = 2a$, so gebraucht ein schwerer Punkt zum Durchlaufen der Cykloidenhälfte nach Gl. 5 die Zeit

$$\frac{t_1}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

Lässt man den schweren Punkt aber die Sehne $AB = a\sqrt{4 + \pi^2}$ durchlaufen, so ist seine Beschleunigung

$$p = g \cdot \sin \alpha = g \cdot \frac{2a}{AB}$$

und, weil $AB = \frac{pt_2^2}{2}$, die Zeit

$$t_2 = \sqrt{\frac{2}{p} \cdot AB} = \sqrt{\frac{2\,AB \cdot AB}{g \cdot 2a}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \sqrt{4 + \pi^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4a}{g}}\sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} = 1{,}186 \cdot \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

Das Durchlaufen der Geraden AB erfordert also 1,186 mal so viel Zeit wie das Durchlaufen der Cykloidenhälfte $\widehat{AB}$.

5. Bewegung eines schweren Punktes in einer Parabel mit lothrechter Achse.

Der Punkt sei gezwungen, sich auf der Parabel AP (Fig. 107) vom Parameter a zu bewegen und habe im Punkt A die Geschwindigkeit c, bei P die Geschwindigkeit (nach 1. Theil, S. 67)

$$v = \sqrt{c^2 + 2g \cdot y};$$

Fig. 107.

es soll der Normalwiderstand N in P berechnet werden.

Aus der Parabelgleichung

$$x^2 = 2a \cdot y \quad \text{folgt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{a}; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} = \frac{2y}{a}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a},$$

daher der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx}} = p\left(1 + \frac{2y}{a}\right)^{3/2}.$$

Daher wird mittels der Formel für die Centripetalbeschleunigung (s. S. 7)

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{c^2 + 2gy}{p\left(1 + \frac{2y}{a}\right)^{3/2}} = \frac{N + mg\cos\vartheta}{m}, \quad \text{also, weil}$$

$$\cos\vartheta = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2y}{a}}},$$

$$N = m\left\{\frac{c^2 + 2gy}{p\left(1 + \frac{2y}{a}\right)^{3/2}} - \frac{g}{\sqrt{1 + \frac{2y}{a}}}\right\}$$

$$N = \frac{m}{\left(1 + \frac{2y}{a}\right)^{3/2}}\left\{\frac{c^2}{a} + \frac{2gy}{a} - g\left(1 + \frac{2y}{a}\right)\right\}$$

$$= \frac{mg}{\left(1 + \frac{2y}{a}\right)^{3/2}}\left(\frac{c^2}{ga} - 1\right).$$

Für $c^2 = g \cdot a$ wird durchweg $N = 0$, d. h. der Massenpunkt bedarf in diesem Fall einer Stützung Seitens der Bahn nicht, durchläuft dieselbe vielmehr als freie Bahnlinie.

Bekanntlich ist ja für die freie Bewegung eines mit der Geschwindigkeit c wagerecht geworfenen Punktes (1. Theil, S. 50)

$$x = ct; \quad y = {}^1/_2\, g t^2, \quad \text{mithin}$$

$$y = \frac{gx^2}{2c^2} \quad \text{oder}$$

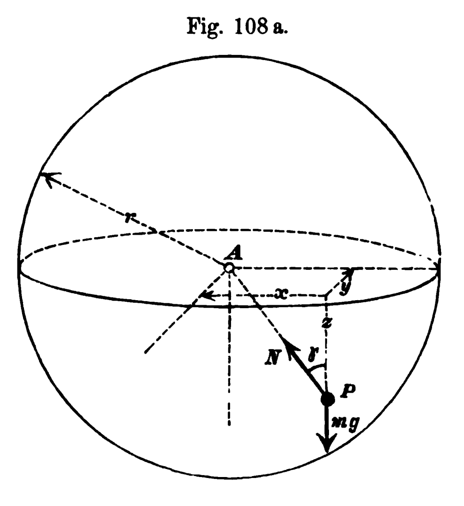
$$x^2 = 2\frac{c^2}{g}y,$$

was eine parabolische Bahnlinie mit dem Parameter $a = \frac{c^2}{g}$ bedeutet und mit obiger Bedingung $c^2 = g \cdot a$ für $N = 0$ übereinstimmt.

D. Bewegung eines schweren Punktes auf einer Kugelfläche; räumliches Pendel.

Der Massenpunkt sei mittels eines Fadens von der Länge r an den Mittelpunkt A der Kugelfläche gefesselt (Fig. 108 a). Bildet der Faden in der Lage AP mit den drei Achsen die Winkel α, β, γ, so ist

Fig. 108 a.



$$r \cos \alpha = x;$$

$$r \cos \beta = y;$$

$$r \cos \gamma = z.$$

In der x-Richtung wirkt nur $-N \cdot \cos \alpha$, in der y-Richtung nur $-N \cdot \cos \beta$, in der z-Richtung $mg - N \cdot \cos \gamma$. Daher erhält man die Gleichungen

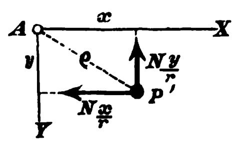


Fig. 108 b.

1) $$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{N}{m}\frac{x}{r};$$

2) $$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{N}{m}\frac{y}{r};$$

3) $$\frac{d^2 z}{dt^2} = g - \frac{N}{m}\frac{z}{r}$$

und als Ersatz für die unbekannte Grösse der Kraft N die Gleichung der Kugel

4) $$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Da der Normalwiderstand N keine Arbeit verrichtet, so gilt, wenn zu Anfang der Massenpunkt sich in einer Tiefe $z = h$ unter dem Mittelpunkt A befand und die Geschwindigkeit c hatte, für die Geschwindigkeit v an der beliebigen Stelle P:

5) $$v^2 = c^2 + 2g(z - h) = c^2 - 2gh + 2gz.$$

Um nun zunächst N zu bestimmen, multiplicire man die Gleichungen 1, 2 und 3 bezw. mit x, y, z und zähle sie zusammen; man erhält dann:

6) $$\frac{x d^2 x + y d^2 y + z d^2 z}{dt^2} = gz - \frac{N}{m} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} = gz - \frac{N}{m} r.$$

Gl. 4 giebt aber, zweimal nach t differentiirt:

7) $$x dx + y dy + z dz = 0 \quad \text{und}$$

$$x d^2 x + dx^2 + y d^2 y + dy^2 + z d^2 z + dz^2 = 0, \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{x d^2 x + y d^2 y + z d^2 z}{dt^2} = -\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

$$= -v^2 = -(c^2 - 2gh + 2gz)$$

(nach Gl. 5). Verbindet man letztere Gl. mit Gl. 6, so ergiebt sich

$$gz - \frac{N}{m} r = -c^2 + 2gh - 2gz, \quad \text{also}$$

8) $$N = m\left(3g\frac{z}{r} + \frac{c^2}{r} - 2g\frac{h}{r}\right).$$

Hiermit ist N als Funktion von z gefunden.

Eine Gleichung für die lothrechte Seitengeschwindigkeit $v_z = \frac{dz}{dt}$ lässt sich ziemlich leicht entwickeln. Die Projektion der Bewegung auf die xy-Ebene (Fig. 108b) erfolgt nämlich nur unter Einwirkung der beiden Kräfte $N \cdot \frac{x}{r}$ und $N \cdot \frac{y}{r}$, welche mit $AP' = \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ eine stets nach A gerichtete Mittelkraft $N \cdot \frac{\varrho}{r} = N \sin \gamma$ liefern. Daher muss für diese Projektionsbewegung nach S. 85 der Satz der Flächen gelten, so dass nach Gl. 4, S. 86, wenn man darin r mit ϱ vertauscht,

9) $$\varrho^2 d\vartheta = A \cdot dt \quad \text{oder}$$

10) $$x \cdot dy - y \cdot dx = A \cdot dt \quad \text{wird.}$$

Bildet man aus Gl. 7:

$$x dx + y dy = -z \cdot dz,$$

quadrirt diese und addirt sie zu der quadrirten Gl. 10, so ergiebt sich

$$x^2 dx^2 + 2xy \cdot dx \cdot dy + y^2 dy^2 = z^2 dz^2$$

$$y^2 dx^2 - 2xy \cdot dx \cdot dy + x^2 dy^2 = A^2 dt^2$$

$$(x^2 + y^2) dx^2 + (x^2 + y^2) dy^2 = z^2 \cdot dz^2 + A^2 \cdot dt^2$$

Vertauscht man nun, um x und y zu entfernen, $x^2 + y^2$ mit $r^2 - z^2$ (nach Gl. 4), so wird

$$(r^2 - z^2)(dx^2 + dy^2) = A^2dt^2 + z^2dz^2,$$

und wenn man weiter, um auch dx und dy zu beseitigen, links noch $r^2dz^2 - r^2dz^2$ hinzufügt,

$$(r^2 - z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - r^2dz^2 = A^2dt^2, \quad \text{also, weil}$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 = v^2dt^2 = (c^2 - 2gh + 2gz)dt^2 \quad \text{(Gl. 5):}$$

$$(r^2 - z^2)(c^2 - 2gh + 2gz)dt^2 - r^2dz^2 = A^2dt^2.$$

Hieraus ergiebt sich

$$11) \qquad \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{(r^2 - z^2)(c^2 - 2gh + 2gz) - A^2}{r^2}.$$

Eine interessante Beziehung für die Höhe der Kugelzone, innerhalb welcher die Bewegung überhaupt erfolgt, erhält man unter der Voraussetzung, dass die Anfangsgeschwindigkeit c wagerecht gerichtet war. Dann ist nämlich, wenn der Anfangswerth von ϱ mit

$$\varrho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{r^2 - h^2}$$

bezeichnet wird (Fig. 109),

Fig. 109.

$$\varrho_0 \cdot d\vartheta = c \cdot dt,$$

also nach Gl. 9 für den Anfang der Bewegung

$$A = \varrho_0^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \varrho_0 c = c\sqrt{r^2 - h^2}, \quad \text{d. h.}$$

$$A^2 = c^2(r^2 - h^2).$$

Mit Einführung dieses Werthes wird aus Gl. 11:

$$\frac{dz^2}{dt^2} = \frac{(r^2 - z^2)(c^2 - 2gh + 2gz) - c^2(r^2 - h^2)}{r^2},$$

was sich leicht zu

$$\frac{dz^2}{dt^2} = \frac{2g(r^2 - z^2)(z - h) - c^2(z^2 - h^2)}{r^2}$$

und dann auch zu

$$12) \qquad \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{z - h}{r^2}\left\{2g(r^2 - z^2) - c^2(z + h)\right\}$$

umschreiben lässt.

Will man diejenigen Werthe von z kennen, für welche $\frac{dz}{dt} = 0$ wird, so setze man die rechte Seite gleich Null. Dem entspricht zunächst $z = h$, was selbstverständlich ist, weil ja angenommen war, dass die Anfangsgeschwindigkeit c wagerecht sei. Setzt man aber den eingeklammerten zweiten Faktor der rechten Seite der Gl. 12 gleich Null, so folgt, dass für

$$13)\qquad z = -\frac{1}{2}\frac{c^2}{2g} \pm \sqrt{r^2 - h \cdot \frac{c^2}{2g} + \frac{1}{4}\left(\frac{c^2}{2g}\right)^2}$$

ebenfalls $\frac{dz}{dt}$ zu Null wird. Von den beiden Werthen z_1 und z_2, welche durch Gl. 13 bestimmt werden, ist, wie Zahlenrechnungen zeigen, der eine, absolut genommen, stets kleiner als r, der andere stets grösser als r. Da aber bei der vorgeschriebenen Bewegung auf der Kugelfläche vom Halbmesser r ein Werth von z, der grösser als r ist, nicht vorkommen kann, so liefert Gl. 13 nur einen brauchbaren Werth z_1. Die beiden Werthe $z = h$ und $z = z_1$, welche $\frac{dz}{dt}$ zu Null machen, bezeichnen Maximum und Minimum von z, begrenzen also diejenige Kugelzone, innerhalb deren die Bewegung erfolgt. An den wagerechten Rändern dieser Zone hört der Punkt auf zu steigen bezw. zu fallen, kehrt also seine lothrechte Seitenbewegung um.

Fig. 110.

Bei bestimmtem Halbmesser r der Halbkugel und bestimmter Tiefe h des Anfangspunktes der Bewegung giebt es auch eine Anfangsgeschwindigkeit c, für welche die beiden äussersten Werthe h und z_1 von z einander gleich werden, so dass dann die Bewegungszone zu einem wagerechten Kreise mit konstantem $z = h$ zusammenschrumpft. Man findet diese Geschwindigkeit c indem man in Gl. 13 $z = h$ einführt. Dann folgt

$$\left(h + \frac{1}{2}\frac{c^2}{2g}\right)^2 = r^2 - h \cdot \frac{c^2}{2g} + \frac{1}{4}\left(\frac{c^2}{2g}\right)^2 \quad \text{oder}$$

$$14)\qquad \frac{c^2}{2g} = \frac{r^2 - h^2}{2h} = \frac{\varrho_0^2}{2h} \quad \text{(Fig. 110)} \quad \text{und} \quad c = \varrho_0\sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Die Vorrichtung bildet mit dieser Geschwindigkeit c das im 1. Theile, S. 69 behandelte **Kegelpendel**. Die Bewegung in dem wagerechten Kreis erfolgt gleichförmig, die Umlaufszeit ist

$$t_1 = \frac{2 \varrho_0 \pi}{c} = 2 \pi \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Beispiel: An dem Endpunkt eines bei A (Fig. 108) befestigten Fadens von $r = 1^m$ Länge befinde sich eine kleine Bleikugel; der Faden sei derartig ausgestreckt, dass die Kugel sich anfänglich in einer Tiefe $h = 0{,}5^m$ unter A befinde. Es soll die Kugel nun wagerecht und rechtwinklig zum Faden mit einer Geschwindigkeit c fortgeschnellt und der Werth z_1 ermittelt werden, welcher mit h die Bewegungszone begrenzt. Für c sollen der Reihe nach verschiedene Grössen eingeführt werden.

Für $\frac{c^2}{2g} =$	4^m	3^m	2^m	1^m	$0{,}75^m$	$0{,}5^m$	$0{,}25^m$
d. h. $c =$	8,86	7,67	6,26	4,43	3,84	3,13	2,215

wird nach Gl. 13

$z_1 =$	$-0{,}268$	$-0{,}18$	0	$+0{,}366$	$+0{,}5$	$+0{,}651$	$+0{,}819$
$z_2 =$	$-3{,}732$	$-2{,}83$	-2	$-1{,}366$	$-1{,}25$	$-1{,}151$	$-1{,}069$.

Negative Werthe von z bedeuten Stellen der Kugelfläche, welche oberhalb des Mittelpunktes liegen. Bei Geschwindigkeitshöhen $> 0{,}75$ steigt der Massenpunkt von der um $h = 0{,}5^m$ unterhalb des Mittelpunktes gelegenen Anfangslage bis zu der durch z_1 angegebenen Höhe empor, um dann wieder zu der ursprünglichen wagerechten Ebene zurückzusinken. Diese Bewegung auf- und abwärts wiederholt sich fortwährend, wobei der Massenpunkt übrigens im Allgemeinen nicht wieder die gleichen Stellen durchläuft. Bei einer Geschwindigkeitshöhe $= 0{,}75^m$ fallen (in Übereinstimmung mit Gl. 14) z_1 und h zusammen, d. h. der Punkt bleibt stets in gleicher Höhe. Bei Geschwindigkeitshöhen $< 0{,}75^m$ ist $z_1 > h_1$, d. h. der Massenpunkt sinkt aus der Anfangshöhe herab. Bei allen vorstehend angenommenen Werthen von c und daraus berechneten Grössen z_1 bleibt N durchweg positiv, kann also durch einen Faden ausgeübt werden.

Kleine Schwingungen. Befindet sich der Massenpunkt zu Anfang in nur geringer Entfernung vom tiefsten Punkte der Kugelfläche und bekommt er eine so wenig erhebliche Geschwindigkeit, dass er sich nur unbedeutend heben kann, so wird annähernd $\left(\text{mit } z = h = r \text{ und kleinem } \frac{c^2}{2g}\right)$ nach Gl. 8:

$$N = mg.$$

Hiermit gehen Gl. 1 und 2 (S. 129) über in

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\frac{x}{r}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g\frac{y}{r}.$$

Diese stimmen mit der Gl. 2, S. 92 überein, wenn $k^2 = g:r$ gesetzt wird, bezeichnen daher eine elliptische Bewegung um den tiefsten Punkt der Kugel als Mittelpunkt und mit der Umlaufszeit (Gl. 10, S. 95)

$$t_1 = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

(Vergl. auch S. 121/2, Fig. 101).

Auch der allgemeinere, S. 129—132 behandelte Fall führt, wie in Dr. Woldemar Voigt's Mechanik, S. 68 gezeigt wird, zu einer Bahnlinie, deren Horizontalprojektion Ähnlichkeit mit einer Ellipse hat, deren Hauptachsen sich aber fortgesetzt drehen.

E. Scheinbare (relative) Bewegung eines Massenpunktes.

Auf S. 48, Gl. 1, wurde gezeigt, dass die scheinbare oder relative Beschleunigung p_1 eines Punktes in Bezug auf einen beliebig bewegten Raum zu finden ist als geometrische Summe der wahren oder absoluten Beschleunigung p und zweier Ergänzungsbeschleunigungen $(-p_2)$ und $(-p_3)$. Davon bedeutet p_2 die Beschleunigung, mit welcher sich diejenige Stelle A der scheinbaren Bahnlinie bewegt, an welcher sich der Massenpunkt augenblicklich, d. h. im Zeitpunkte t, befindet; $(-p_2)$ ist das Entgegengesetzte von p_2. Ferner ist nach S. 40 $p_3 = 2 \cdot w \cdot \omega \cdot \sin\alpha$, wenn w die augenblickliche scheinbare Geschwindigkeit, ω die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die scheinbare Bahnlinie um die durch den Punkt A derselben gelegt gedachte augenblickliche Drehachse dreht, α der Winkel, den diese Achse mit der scheinbaren Bahnlinie bildet. Ist AB das während des folgenden Zeittheilchens dt beschriebene

Bahntheilchen der scheinbaren Bewegung, so stimmt p_3 nach Richtung und Sinn mit der Bewegung des Punktes B bei der Drehung um die Augenblicksachse überein; $-p_3$ ist das Entgegengesetzte von p_3.

Die wahre Beschleunigung p ist die Folge der Mittelkraft K der wirklich vorhandenen Kräfte, es ist also

$$p = K : m \quad \text{oder} \quad K = mp.$$

Werden auch die übrigen hier in Frage kommenden Beschleunigungen mit der Masse m multiplicirt, so gilt, entsprechend der obigen Beziehung

$$p_1 \equiv p, \quad (-p_2), \quad (-p_3) \quad \text{auch}$$

$$mp_1 \equiv K, \quad (-mp_2), \quad (-mp_3). \tag{1}$$

Hierin kann die der scheinbaren oder relativen Beschleunigung p_1 entsprechende Kraft mp_1 als die scheinbare oder relative Kraft bezeichnet werden; $-mp_2$ und $-mp_3$ heissen die Ergänzungskräfte der scheinbaren Bewegung. Die scheinbare Kraft ergiebt sich also als die geometrische Summe oder Mittelkraft aus der wirklichen oder absoluten Kraft und den beiden Ergänzungskräften der scheinbaren Bewegung.

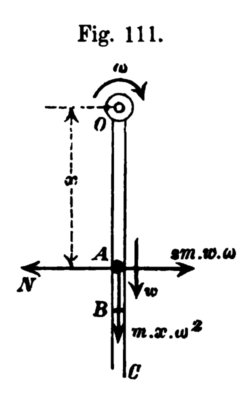
Die Hinzufügung der beiden Ergänzungskräfte zu den wirklichen Kräften gestattet, von der Bewegung der Bahnlinie oder des Raumes, in denen die Bewegung des Massenpunktes erfolgt, ganz abzusehen und die scheinbare Bewegung wie eine wahre Bewegung zu betrachten. Nach Anbringung der Ergänzungskräfte sind sämmtliche Hülfssätze, die für wahre oder absolute Bewegungen gefunden wurden, auch für die scheinbare Bewegung gültig. Nur darf man sich dadurch nicht verleiten lassen, die Ergänzungskräfte als wirklich vorhandene Kräfte anzusehen; sie sind nur gedachte (fingirte) Kräfte, zu dem Zwecke eingeführt, um die Untersuchung der scheinbaren Bewegung zu erleichtern.

Die zweite Ergänzungskraft $-2m \cdot w \cdot \omega \cdot \sin\alpha$ wird zu Null, wenn $\omega = 0$ ist, d. h. wenn die Bahnlinie oder der Raum, in Bezug auf welche die scheinbare Bewegung betrachtet wird, sich nur verschiebt, nicht aber dreht, und ferner, wenn $w = 0$ ist, d. h. wenn der Massenpunkt in dem sich drehenden Raume scheinbar ruht, d. h. dessen Drehung einfach mitmacht. Diese beiden, erheblich einfacheren Fälle wurden schon im 1. Theile, S. 78 und 87 behandelt.

I. Bewegung eines Massenpunktes in einem geraden, sich gleichförmig drehenden Rohre ohne Reibung.

Die Drehung des Rohres OC (Fig. 111) erfolge mit der gleichbleibenden Winkelgeschwindigkeit ω (rechts herum) um eine das Rohr rechtwinklig schneidende Achse O. Der Massenpunkt befinde sich im Zeitpunkte t bei A im Abstand x von O und habe in Bezug auf das Rohr eine Geschwindigkeit w mit dem Sinne nach aussen. Die Schwere mg werde vernachlässigt oder stehe rechtwinklig zur Bildebene, so dass sie durch einen gleichen Gegendruck des Rohres aufgehoben wird; es sollen nur die in der Bildebene auftretenden Bewegungen und Kräfte betrachtet werden. Dann ist der in der Bildebene wirkende Normaldruck N des Rohres die einzige an dem Massenpunkte wirklich vorhandene Kraft. Der Sinn derselben ist noch unbestimmt und werde vorläufig als nach links gerichtet angenommen.

Fig. 111.



Es müssen nun die beiden Ergänzungskräfte bestimmt werden. Der Punkt A des Rohres, wo der Massenpunkt sich im Zeitpunkte t befindet, hat eine gleichförmige Kreisbewegung, mithin eine Centripetalbeschleunigung $p_2 = x \cdot \omega^2$; daher ist die erste Ergänzungskraft einfach die Centrifugalkraft $m \cdot x \cdot \omega^2$. Denkt man sich auf Grund der S. 39 gepflogenen Erörterungen durch A eine zu der wahren Drehachse parallele Augenblicksachse gelegt, so ist die entsprechende, für die Ergänzungskraft massgebende Winkelgeschwindigkeit gleich ω und der Winkel $\alpha = 90^0$. Der gemäss dem Sinne der scheinbaren Geschwindigkeit w in Frage kommende Nachbarpunkt B bewegt sich bei der Drehung um A nach links; hierzu entgegengesetzt, also nach rechts, hat man die zweite Ergänzungskraft in der Grösse $2\,m \cdot w \cdot \omega$ an dem Massenpunkt anzubringen und kann nun behaupten, dass die scheinbare Bewegung des Massenpunktes längs des Rohres unter Einwirkung der drei in Fig. 111 angegebenen Kräfte erfolge. Da diese Bewegung wegen der geraden Form des Rohres ohne Normalbeschleunigung geschieht,

so müssen die rechtwinklig zum Rohre stehenden Kräfte sich aufheben, d. h. es muss

1) $$N = 2m \cdot w \cdot \omega$$

sein, worin freilich w noch unbekannt ist. Es treibt also der bei der Drehung dem Massenpunkte folgende Theil der Rohrwandung den Punkt vor sich her. Man erhält w und somit auch N am einfachsten als Funktion des Ortes, d. h. als Funktion von x, wenn man den Satz vom Arbeitsvermögen (S. 88) verwendet. Von den drei Kräften verrichtet bei der scheinbaren Bewegung nur die Centrifugalkraft eine Arbeit, u. zw. längs des Bahntheilchens $AB = dx$ die Arbeit

2) $$d\mathfrak{A} = m \cdot x \cdot \omega^2 dx.$$

Hatte der Massenpunkt zu Anfang, für $t = 0$, den Abstand $x = a$ von der Achse O, die Geschwindigkeit c längs des Rohres, so ist

$$\frac{mw^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = m \cdot \omega^2 \int_a^x x \cdot dx = m \cdot \omega^2 \frac{x^2 - a^2}{2}.$$ Es ist also

3) $$w = \sqrt{c^2 + \omega^2 (x^2 - a^2)},$$

womit nun auch N nach Gl. 1 für jeden Punkt des Rohres feststeht.

Um das Gesetz der Bewegung längs des Rohres zu erhalten, schreibe man

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = x \cdot \omega^2$$

und integrire diese Gleichung zwei Mal. Das Ergebnis der ersten Integration liegt schon in Gl. 3, weil $dx = w \cdot dt$ ist, nämlich

$$\frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} + x^2 - a^2}, \quad \text{also}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} + x^2 - a^2}} = \omega \cdot dt.$$

Hieraus folgt $$l \left\{ \frac{x + \sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} + x^2 - a^2}}{a + \frac{c}{\omega}} \right\} = \omega \cdot t;$$

$$\sqrt{\frac{c^2}{\omega^2} + x^2 - a^2} = \left(a + \frac{c}{\omega}\right) e^{\omega t} - x.$$

Hieraus findet man leicht

$$4)\qquad x = \frac{1}{2}\left\{\left(a + \frac{c}{\omega}\right)e^{\omega t} + \left(a - \frac{c}{\omega}\right)e^{-\omega t}\right\},$$

worin man noch den Drehungswinkel $\vartheta = \omega t$ des Rohres einführen kann. Die Geschwindigkeit längs des Rohres als Funktion der Zeit wird

$$5)\qquad w = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{2}\left\{\left(a + \frac{c}{\omega}\right)e^{\omega t} - \left(a - \frac{c}{\omega}\right)e^{-\omega t}\right\}.$$

In Wirklichkeit kann natürlich nicht von der blos gedachten Centrifugalkraft Arbeit verrichtet werden, sondern nur von der einzigen wirklich vorhandenen Kraft N, u. zw. ist deren Arbeit doppelt so gross wie die scheinbare Arbeit der Centrifugalkraft, wie Gl. 6 zeigt. Die wahre Bahnlinie des Punktes ist nach Gl. 4 mit $\vartheta = \omega t$ eine Spirale OAQ (Fig. 112). Wegen der Umfangsgeschwindigkeit $x \cdot \omega$ des Punktes A verrichtet N bei der unendlich kleinen Bewegung AQ die Arbeit

Fig. 112.

$$d\mathfrak{A}_w = N \cdot x \cdot \omega \cdot dt = 2m \cdot w \cdot \omega^2 x \cdot dt,$$

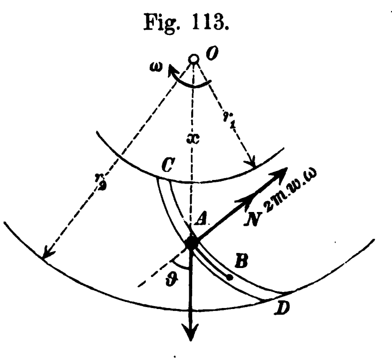
also, weil $w \cdot dt = dx$ ist,

$$6)\qquad d\mathfrak{A}_w = 2m \cdot \omega^2 x \cdot dx = 2\,d\mathfrak{A} \text{ (nach Gl 2).}$$

2. Bewegung eines Massenpunktes in einem gekrümmten, sich gleichmässig drehenden Rohre.

Eine in wagerechter Ebene befindliche Scheibe drehe sich mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit ω um eine lothrechte Achse O (Fig. 113). Auf dem Ringe der Scheibe, welche von dem inneren Halbmesser r_1 zu dem äusseren Halbmesser r_2 reicht, befinde sich ein gekrümmtes Rohr. Der Punkt möge bei C eine Geschwindigkeit w_1 gegen das Rohr gehabt haben; bei A in dem Abstande $OA = x$ von der Achse sei w die Geschwindigkeit gegen das Rohr, ϱ der Krümmungs-

Fig. 113.



Halbmesser des Rohres, ϑ der Winkel zwischen dem Drehungshalbmesser $OA = x$ und der Normalen zum Rohre. Dann ist N wie S. 136 die einzige wirklich vorhandene Kraft in der Drehungsebene. Die erste Ergänzungskraft ist die Centrifugalkraft $m \cdot x \cdot \omega^2$, die zweite ist aus denselben Gründen wie im vorigen Beispiele $= 2m \cdot w \cdot \omega$, normal zu AB gerichtet mit dem Sinne nach rechts. Bei der scheinbaren Bewegung ist wieder die Centrifugalkraft die einzige, welche Arbeit verrichtet; daher

$$\frac{m w^2}{2} - \frac{m w_1^2}{2} = m \cdot \omega^2 \int_{r_1}^{x} x \cdot dx = \frac{m \cdot \omega^2}{2}(x^2 - r_1^2), \text{ also}$$

$$1) \qquad w^2 = w_1^2 + \omega^2 (x^2 - r_1^2).$$

Hierdurch ist w für jede Stelle des Rohres bestimmt. Da die scheinbare Bewegung krummlinig erfolgt, so ist die Centripetal-Beschleunigung

$$\frac{w^2}{\varrho} = \frac{N + 2m \cdot w \cdot \omega - m \cdot x \cdot \omega^2 \cos\vartheta}{m}, \text{ also}$$

$$2) \qquad N = m\left\{\frac{w^2}{\varrho} + x \cdot \omega^2 \cos\vartheta - 2w \cdot \omega\right\};$$

sind ϱ und ϑ für jede Stelle des Rohres bekannt, so ist mit Hülfe von Gl. 1 auch N überall bestimmt.

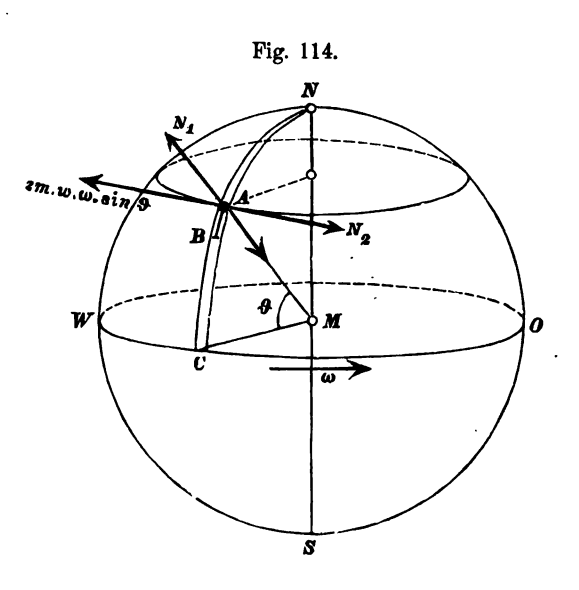
Bei den Radial-Turbinen bewegen sich die Wassertheilchen an Schaufeln entlang, die etwa die Form $CABD$ haben, und üben dabei nach dem Gesetze der Wechselwirkung auf die Schaufel eine der Kraft N entgegengesetzte Druckkraft aus, welche eben die Triebkraft für das Rad bildet und daher an jeder Stelle positiv sein soll. Dagegen würde $N = 0$ die Bedingung sein für die Form derjenigen scheinbaren Bahnlinie, welche der Massenpunkt ohne Einwirkung wahrer Kräfte auf der sich drehenden Scheibe beschreiben würde. Die wahre Bahnlinie ist in diesem Falle eine Gerade.

3. Vorgeschriebene Bewegung längs eines Meridians der sich drehenden Erde.

Ein Massenpunkt m werde auf der nördlichen Halbkugel der Erde mit der Geschwindigkeit w längs eines Meridianes im Sinne

von Norden nach dem Äquator bewegt; dann wird ausser der Anziehungskraft der Erde noch der Widerstand der Bahnlinie wirken, welcher sich in eine Seitenkraft N_1 in der Meridianebene und in eine Seitenkraft N_2 rechtwinklig zur Meridianebene und tangential zum Parallelkreise des augenblicklichen Ortes A (Fig. 114) zerlegen lässt. Um N_1 und N_2, besonders die letztere, leicht bestimmen zu können, denkt man sich die Drehung der Erde weg und dafür die beiden Ergänzungskräfte angebracht. Die erste Ergänzungskraft ist die dem augenblicklichen Ort A entsprechende Centrifugalkraft; sie kann unberücksichtigt bleiben, wenn man als Schwere sogleich die scheinbare Schwere $m \cdot g_\vartheta$ nach 1. Theil, S. 93, die wir allein wahrnehmen und messen können, einführt und welche schon die Mittelkraft aus der wahren Schwere und der Centrifugalkraft wegen der Erddrehung darstellt. Die Richtung dieser scheinbaren Schwere fällt mit der Richtung des Lothes zusammen.

Fig. 114.



Schneidet der Meridian den Äquator in C und ist M der Mittelpunkt der Erde, so bezeichnet der Winkel $AMC = \vartheta$ die geographische Breite des Ortes A. Legt man durch A eine Drehachse parallel der Erdachse, so bildet diese mit dem Bahntheilchen AB ebenfalls den Winkel ϑ, weil die Erdachse zu CM rechtwinklig ist. Dreht man das Bahntheilchen AB um die durch A gelegte Achse im Sinne der Erddrehung, d. h. von West nach Ost, so bewegt sich dadurch B in seinem Parallelkreise nach Osten; die zweite Ergänzungskraft ist daher eine tangential zum Parallelkreise liegende Kraft von der Grösse $2 \cdot m \cdot w \cdot \omega \cdot \sin \vartheta$ mit dem

Sinne nach Westen. Da nun der Massenpunkt bei seiner scheinbaren Bewegung die Meridianebene nicht verlässt, so müssen sich die rechtwinklig zu dieser Ebene wirkenden Kräfte aufheben, d. h. es muss die zweite Ergänzungskraft durch einen eben so grossen Gegendruck

$$1) \qquad N_2 = 2 \cdot m \cdot w \cdot \omega \cdot \sin \vartheta$$

aufgehoben werden. Diesen Seitendruck muss die westliche Seitenwand der vorgeschriebenen Bahn leisten.

In der Meridianebene führt der Punkt eine gleichförmige Kreisbewegung aus, wenn man die Abweichung der Erdform von einer Kugel nicht beachtet. Ist r der Erdhalbmesser, so entspricht dieser Kreisbewegung eine Centripetalbeschleunigung $w^2 : r$, welche von der Centripetalkraft $mg_\vartheta - N_1$ erzeugt werden muss. Sonach ist

$$2) \qquad N_1 = mg_\vartheta - \frac{m w^2}{r}.$$

N_1 ist der Widerstand des Erdbodens, also, lothrecht nach unten genommen, der Druck, den der Massenpunkt auf den Erdboden ausübt. Derselbe vermindert sich nach Gl. 2 mit zunehmender Geschwindigkeit w. Er wird zu Null für

$$2) \qquad w = \sqrt{g_\vartheta \cdot r} = 7905 \,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}.$$

(s. S. 57 und 104), wenn man $g_\vartheta = 9{,}81$ und $r = 6\,370\,000^{\mathrm{m}}$ einführt (s. 1. Theil, S. 94). Für Geschwindigkeiten, wie sie im menschlichen Verkehr auf fester Bahn vorkommen, z. B. auf Eisenbahnen, ist genau genug $N_1 = mg_\vartheta$ wie im Ruhezustande.

Blickt man im Sinne der Bewegung die Bahn entlang, so ist bei der Bewegung von Norden nach dem Äquator die westliche Seitenwand der Bahn, die den Druck N_2 zu leisten hat, die rechtsseitige. Der Massenpunkt übt also bei der Bewegung einen wagerechten Seitendruck nach rechts aus und äussert dadurch das Bestreben nach rechts von der Bahn abzuweichen. Erfolgt die Bewegung umgekehrt vom Äquator nach Norden hin, so vertauschen die beiden Nachbarpunkte A und B des Bahntheilchens ihre Rollen, ähnlich wie in dem Beispiele S. 41—43; der Endpunkt des Bahntheilchens bewegt sich dann, wenn man das Theilchen um eine durch den Anfangspunkt gelegte Achse übereinstimmend mit der Erde sich drehen lässt, nach Westen; daher erhält die zweite Ergänzungskraft einen Sinn nach Osten, der Seitendruck N_2 einen solchen nach

Westen. Diese muss von der östlichen Seitenwand ausgeübt werden; das ist für den nunmehrigen Sinn der Bewegung des Punktes wiederum die rechtsseitige Wand.

In gleicher Weise findet man, dass ein Massenpunkt, der auf der südlichen Halbkugel längs des Meridians bewegt wird, sich stets gegen die linke Seitenwand presst.

Die Druckkraft ist nach Gl. 1 verhältnisgleich mit der Geschwindigkeit w und dem Sinus der geographischen Breite, ist also am Äquator Null, am Pol am grössten.

Nach 1. Theil, S. 92 ist

$$\omega = 2\pi : 86\,164 = 0{,}000\,073 .$$

Für Hannover ist

$$\vartheta = 52^0\,23', \quad \sin\vartheta = 0{,}7921, \quad \omega \cdot \sin\vartheta = 0{,}000\,057\,8,$$

$$\frac{N_2}{mg} = \frac{2 \cdot w \cdot 0{,}000\,057\,8}{9{,}81} = 0{,}000\,011\,78\,w .$$

Hiernach übt auf der nördlichen Halbkugel ein mit $20^{\text{m}}/_{\text{s}}$. Geschwindigkeit längs des Meridians fahrender Eisenbahnzug von 150000^{kg} Gewicht eine wagerechte Druckkraft gegen die rechtsseitige Schiene aus von

$$N_2 = 150000 \cdot 0{,}000\,011\,78 \cdot 20 = 35{,}3^{\text{kg}} .$$

Auf einer zweigleisigen Bahn, wo jedes Gleis stets in derselben Fahrrichtung benutzt wird, also stets dieselbe Schiene den Seitendruck N_2 empfängt, würde man trotz der Kleinheit von N_2 im Verhältnis zu mg vielleicht auf den Gedanken kommen können, der Gefahr einer seitlichen Verschiebung des Gleises oder gar einer Entgleisung nach rechts durch eine Überhöhung der rechtsseitigen Schiene vorzubeugen, wie man in Eisenbahnkurven die äussere Schiene überhöht (s. 1. Theil, S. 71). Für den Winkel α, um den die Querlinie des Gleises gegen die Wagerechte gedreht werden müsste, gilt

$$2) \qquad \alpha = \frac{N_2}{mg} = \frac{35{,}3}{150\,000} = 0{,}000\,235\,6,$$

was bei 1500^{mm} Schienenentfernung einer Überhöhung der rechtsseitigen Schiene um $0{,}35^{\text{mm}}$ entspricht. Eine so geringe Überhöhung hat aber praktisch weder Sinn noch Zweck. Da in einer Kurve vom Halbmesser ϱ für den Winkel α gilt (1. Theil, S. 71)

$$\alpha = \frac{w^2}{g\varrho},$$

so würde obiger Werth von α bei $w = 20^{m}/_{s}$ einem Krümmungshalbmesser $\varrho = 173\,100^{m}$ entsprechen.

Wird ein Massenpunkt mit der Geschwindigkeit w längs des Meridians in Bewegung gesetzt, ist aber eine vorgeschriebene Bahn, welche die Druckkraft ausüben könnte, nicht vorhanden, so wird er mit einer der zweiten Ergänzungskraft entsprechenden Beschleunigung $2\,w \cdot \omega \cdot \sin\vartheta$ vom Meridiane nach rechts hin abweichen. Bleibt diese Beschleunigung während der Zeit t unverändert, so erfährt der Punkt eine seitliche Abweichung

$$3)\qquad z = w \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot t^2 = l \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot t\,,$$

wenn man $w \cdot t$ mit l vertauscht. Diese Abweichung kommt z. B. in Frage, wenn ein Massenpunkt in der Richtung des Meridians geworfen wird. Darin bedeutet w die mittlere wagerechte Seitengeschwindigkeit.

In dem Beispiel auf S. 111 wurde die Wurfweite von 8460^{m} in $19{,}14^{s.}$ zurückgelegt. Die hiernach berechnete rechtsseitige Abweichung ergiebt sich zu

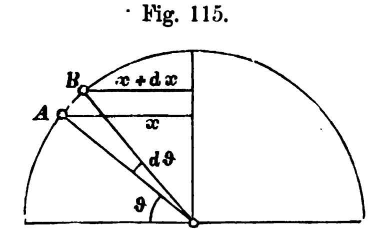
$$z = 8460 \cdot 0{,}000\,057\,8 \cdot 19{,}14 = 9{,}36^{m},$$

wenn das Geschütz in der Richtung des Meridians in der geographischen Breite Hannovers abgefeuert wird.

Unmittelbare Berechnung der seitlichen Abweichung.

Die Beseitigung der Bewegung des Raumes, in welchem die scheinbare Bewegung erfolgt, und die Ersetzung derselben durch die Ergänzungskräfte ist zwar für die Beantwortung mancher Frage sehr vortheilhaft, verdunkelt aber den wirklichen Vorgang; es ist deshalb nützlich, in geeigneten Fällen die scheinbare Bewegung auch durch Betrachtung der wirklichen Bewegungsverhältnisse zu untersuchen. Solches möge hier hinsichtlich der seitlichen Abweichung nach rechts (auf der nördlichen Halbkugel) geschehen.

Fig. 115.



Bei dem Übergange des Massenpunktes von A nach B (Fig. 115) ändert sich der Drehungshalbmesser von x auf $x + dx$, d. h. von $r \cos\vartheta$ auf $r(\cos\vartheta - \sin\vartheta \cdot d\vartheta)$. Der Punkt A der Erdoberfläche hat die Umdrehungsgeschwindigkeit $x \cdot \omega$, der Punkt B aber die um $r \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta$ kleinere. Der von A nach B kommende Massenpunkt bringt nun ausser der scheinbaren Geschwindigkeit w längs des Meridianes die Drehungsgeschwindigkeit $x \cdot \omega = r \cdot \omega \cdot \cos\vartheta$ längs des Parallelkreises mit und ist nun, nachdem er in B angelangt, der hier langsamer sich bewegenden Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit $r \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta$ nach Osten vorausgeeilt. Dem entspricht in der Zeit dt eine östliche Voreilung um

$$dz = r \cdot \omega \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot dt,$$

oder, weil $r \cdot d\vartheta = AB = w \cdot dt$ ist, um $dz = w \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot dt^2$, also für kleine endliche Bewegungen in kurzem Zeitraume t um

$$z = w \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot t^2,$$

oder auch, wenn man die Wegeslänge $AB = w \cdot t = l$ setzt:

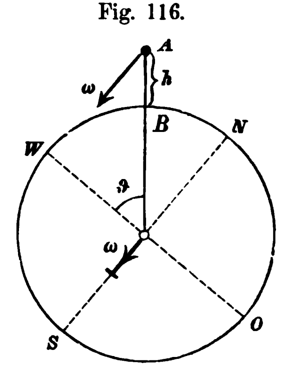
$$z = l \cdot \omega \cdot \sin\vartheta \cdot t,$$

übereinstimmend mit Gl. 3.

4. Vorgeschriebene Bewegung längs einer lothrechten Bahn auf der sich drehenden Erde.

In einem lothrechten Rohre AB (Fig. 116) von der Höhe h falle ein Massenpunkt; dann ist zunächst die Schwere eine der wirklichen Kräfte. Von den Ergänzungskräften ist die erste schon berücksichtigt, wenn man mit der scheinbaren Schwere rechnet. Legt man nun durch A eine zur Erdachse SN parallele Achse und ertheilt der Bahn AB eine Drehung ω, so bewegt sich der Endpunkt B nicht nach vorn, sondern nach rückwärts im Sinne nach Westen; die Bahnlinie bildet mit der Drehachse einen Winkel $\alpha = 90^0 - \vartheta$, wenn ϑ die geographische Breite des Ortes A; daher ist die zweite Ergänzungskraft $2m \cdot w \cdot \omega \cdot \cos\vartheta$, u. zw. mit dem Sinne nach Osten, und da

Fig. 116.

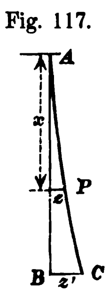


die scheinbare Bahnlinie AB geradlinig ist, so wird diese Ergänzungskraft aufgehoben durch eine entgegengesetzte Kraft

1) $$N_2 = 2\,m \cdot w \cdot \omega \cdot \cos\vartheta,$$

welche nach Westen gerichtet ist, also von der östlichen Rohrwandseite ausgeübt wird. Der Massenpunkt drückt daher mit einer Kraft N_2 gegen die östliche Seite der Rohrwand und wird, wenn man das Rohr entfernt, den Punkt also frei fallen lässt, mit der Beschleunigung $2\,w \cdot \omega \cdot \cos\vartheta$ von der Lothrechten in östlichem Sinn abweichen. Ist AB (Fig. 117) die Lothrechte, APC die Bahn des freien Falles in Bezug auf die sich drehende Erde, z die östliche Abweichung, so ist

Fig. 117.



$$\frac{d^2z}{dt^2} = 2 \cdot w \cdot \omega \cdot \cos\vartheta.$$

Die Geschwindigkeit w längs APC kann wegen der Geringfügigkeit von z nach den gewöhnlichen Fallgesetzen beurtheilt werden; dann ist $w = gt$, also

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 2 \cdot g \cdot t \cdot \omega \cdot \cos\vartheta.$$

Dies giebt $$\frac{dz}{dt} = g \cdot \omega \cdot \cos\vartheta \cdot t^2,$$

wobei die Integrationskonstante fortbleibt, weil für $t = 0$ auch

$$w = 0, \quad N_2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

sein muss. Weiter wird

$$z = g \cdot \omega \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{t^3}{3};$$

hieraus kann mit $x = \frac{gt^2}{2}$ also $t^2 = \frac{2\,x}{g}$ die Zeit entfernt werden.

Es wird $$z = g \cdot \omega \cdot \frac{\cos\vartheta}{3}\left(\frac{2\,x}{g}\right)^{3/2},$$

und für $x = h$:

2) $$z' = \frac{2}{3}\,\omega \cdot \cos\vartheta \cdot h\sqrt{\frac{2\,h}{g}}.$$

Die eigentliche Ursache dieser östlichen Abweichung eines frei fallenden Körpers von der Lothrechten, die am Pole Null, am

Äquator (mit $\cos\vartheta = 1$) am grössten ist, liegt natürlich darin, dass der bei A frei gelassene Körper die seiner Anfangslage entsprechende östliche Umfangsgeschwindigkeit der Erddrehung mitbringt und der bei B mit geringerer Umfangsgeschwindigkeit sich bewegenden Stelle der Lothrechten also vorauseilt. Daher ist auch auf beiden Halbkugeln der Erde die Abweichung übereinstimmend nach Osten gerichtet.

Versuche über diesen Vorgang sind besonders in einem Schachte bei Freiberg in Sachsen angestellt worden. Dort ist die geographische Breite $\vartheta = 51^0$; die Fallhöhe betrug $158{,}5^{\mathrm{m}}$. Dann ist nach Gl. 2:

$$z' = \frac{2}{3} \cdot 0{,}000073 \cdot 158{,}5 \cdot \cos 51^0 \sqrt{\frac{2 \cdot 158{,}5}{9{,}81}} = 0{,}0276^{\mathrm{m}},$$

während die Beobachtung $0{,}0283^{\mathrm{m}}$ ergab. Der Unterschied beider Zahlen ist leicht dadurch zu erklären, dass wegen des Luftwiderstandes die Falldauer $> \sqrt{\frac{2h}{g}}$ werden muss.

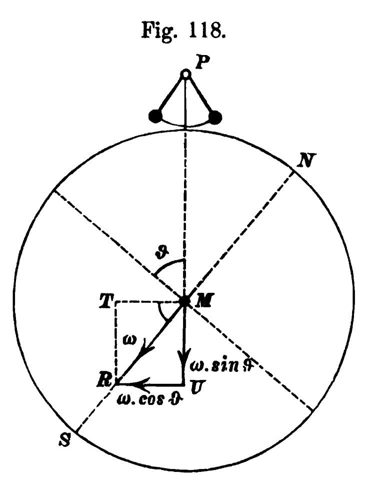
5. Einfluss der Drehung der Erde auf die Pendelschwingung; Foucault'scher Pendelversuch.

Bei kleinem Ausschlagwinkel kann die Pendelbewegung nach S. 121/2 annähernd als geradlinige Schwingungsbewegung aufgefasst werden. Das S. 121 entwickelte Gesetz der Pendelschwingung galt unter der Annahme, dass die Erde in Ruhe sei; unter dieser Voraussetzung erfolgt die Schwingung in einer unveränderlichen lothrechten Ebene. Untersucht man aber die scheinbare Bewegung eines Pendels in Bezug auf die sich drehende Erde, so ergiebt sich eine von dem französischen Physiker Foucault (geboren am 18. September 1819 zu Paris, gestorben daselbst am 11. Februar 1868) im Jahr 1852 gefundene Abweichung. Bei einem am Äquator schwingenden Pendel haben Aufhängepunkt, Erdoberfläche, sowie auch der Massenpunkt des Pendels die sehr grosse Umfangsgeschwindigkeit der Erde nahezu gemeinsam. Daher sind die Verhältnisse mit grosser Annäherung dieselben, als ob das Pendel in einem Raum aufgehängt wäre, der eine geradlinige, gleichförmige Verschiebung erfährt; die scheinbare Schwingung erfolgt daher ganz so, wie es bei ruhender Erde geschehen würde; nur kommt

statt der wahren Fallbeschleunigung die scheinbare Fallbeschleunigung am Äquator, d. h. $g_0 = 9{,}781$ (s. 1. Theil, S. 92) bei der Berechnung der Schwingungsdauer zur Anwendung.

Ist ein Pendel aber am Pol aufgehängt, so hat der Aufhängepunkt keine Bewegung. Auf den Massenpunkt wirkt die wahre Schwere mit der Fallbeschleunigung $g = 9{,}831$ (1. Theil, S. 94) und die Fadenspannkraft. Die wahre Pendelschwingung erfolgt in einer unveränderlichen Ebene. Die Erde bildet einen Raum, der sich gegen diese unveränderliche Ebene in einem Sterntage ein Mal in dem Sinne von Westen nach Osten dreht; umgekehrt wird also die Schwingungsebene des Pendels in einem Sterntage sich ein Mal in dem Sinne von Osten nach Westen scheinbar gegen die Erde drehen.

Fig. 118.



Ist das Pendel aber bei P (Fig. 118) in einer nördlichen geographischen Breite ϑ aufgehängt, so kann man, um die scheinbare Bewegung der Schwingungsebene des Pendels zu finden, die Winkelgeschwindigkeit ω der Erde als Strecke MR auftragen und nach dem Satze vom Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten (S. 35) in die Theilstrecken $UR = \omega \cdot \cos \vartheta$ und $MU = \omega \cdot \sin \vartheta$ zerlegen. Von diesen beiden hat $\omega \cdot \cos \vartheta$, wie vorstehend für das am Äquator aufgehängte Pendel erläutert, keinen Einfluss auf die Schwingungsebene des Pendels, sondern nur eine verkleinernde Wirkung auf die scheinbare Fallbeschleunigung $g_\vartheta = 9{,}806 - 0{,}025 \cos 2\vartheta$ (1. Theil, S. 94). Die Winkelgeschwindigkeit $\omega \cdot \sin \vartheta$, deren Achse durch den Aufhängepunkt P des Pendels geht, bedingt aber, nach Vergleich mit dem für ein am Pol aufgehängtes Pendel, eine scheinbare Drehung der Schwingungsebene mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \cdot \sin \vartheta$ in einem Sinne, welcher der Drehung der Erde entgegengesetzt ist, d. h. in demselben Sinne, in welchem der scheinbare Umlauf der Sonne um die Erde erfolgt, nämlich für die nördliche

Halbkugel von Ost über Süd nach West, für die südliche Halbkugel von Ost über Nord nach West. Da die Winkelgeschwindigkeit ω der Erde einer Umlaufszeit gleich einem Sterntag entspricht, so wird bei der kleineren Geschwindigkeit $\omega \cdot \sin\vartheta$ ein Umlauf die Zeit von $1 : \sin\vartheta$ Tagen erfordern. Für Hannover mit $\sin\vartheta = 0{,}7921$ ergiebt dies 1,26 Tage. In dieser Zeit dreht sich die Schwingungsebene des Pendels scheinbar um die durch den Aufhängepunkt desselben gelegte Lothrechte.

6. Scheinbare Bewegung der Planeten in Bezug auf die Sonne.

Auf S. 97 bis 100 wurde die Bewegung der Planeten um die Sonne unter der Voraussetzung behandelt, dass der Mittelpunkt der Sonne ein festes Anziehungscentrum sei. Dies ist aber nicht streng richtig; vielmehr wirkt die Kraft $\frac{mq}{r^2}$ (Gl. 1, S. 97), welche die Sonne auf einen Planeten von der Masse m ausübt, in umgekehrtem Sinn auch auf die Sonne von der Masse m_1 (Fig. 119) und ertheilt dieser eine stets nach dem Planeten gerichtete Beschleunigung

$$p_2 = \frac{mq}{m_1 r^2}.$$

F. 119.

Die Kepler'schen Gesetze betreffen nur die scheinbare Bewegung der Planeten in Bezug auf die Sonne, d. h. in Bezug auf ein durch den Mittelpunkt der Sonne gelegtes, mit diesem sich parallel verschiebendes Achsenkreuz. Um die scheinbare Beschleunigung zu erhalten, muss man zu der wahren Beschleunigung $p = q : r^2$ des Planeten im Sinne nach der Sonne noch das Entgegengesetzte der Beschleunigung p_2 hinzufügen. Da nun $+p_2$ den Sinn von der Sonne nach dem Planeten hat, so ist der Sinn der Ergänzungsbeschleunigung $-p_2$ ebenso wie p vom Planeten nach der Sonne gerichtet, und die scheinbare Beschleunigung p_1 wird die Summe beider, nämlich

$$p_1 = \frac{q}{r^2}\left(1 + \frac{m}{m_1}\right).$$

Da die früheren Untersuchungen S. 97 auf einer Beschleunigung $q : r^2$ beruhten, so sind deren Ergebnisse noch in der Weise zu berichtigen, dass der von der Sonnenmasse abhängige Festwerth q durchweg noch mit $1 + \frac{m}{m_1}$ multiplicirt wird. Für die Bewegung der Planeten ist diese Äenderung unbedeutend, da $m : m_1$ meist eine kleine Zahl, für die Erde $1 : 355000$, für den Jupiter freilich etwa $1 : 1000$. Für die Bewegung des Mondes um die Erde ist dieser Umstand schon erheblicher, da deren Massenverhältnis etwa $1 : 77$ beträgt.

Dritte Abtheilung.

Mechanik einer Gruppe von Massenpunkten.

Jede beliebige Anzahl von Massenpunkten, deren Bewegungen in irgend welchen Beziehungen zu einander stehen, oder deren gleichzeitige Bewegungen wir betrachten, kann in ihrer Gesammtheit als eine Massengruppe angesehen werden. In der Regel werden die einzelnen Massenpunkte einer Gruppe gegenseitige Kräfte auf einander ausüben, die man als innere Kräfte der Gruppe bezeichnet; in Folge davon wird die Bewegung eines Punktes der Gruppe einen gewissen Einfluss auf die Bewegung der anderen Punkte ausüben. Aber auch, wenn diese Kräfte Null sind, so dass die Massenpunkte gar nicht auf einander einwirken, kann man sie als eine Gruppe von Massenpunkten auffassen.

A. Gleichgewicht einer Massengruppe.

I. Satz der willkürlichen Verrückungen; Satz der virtuellen Verrückungen.

Man bezeichnet eine Massengruppe als im Gleichgewichte befindlich, wenn jeder ihrer Massenpunkte im Gleichgewicht ist, d. h. ruht, oder sich gleichförmig, geradlinig bewegt. Damit dies der Fall sei, müssen die an jedem Massenpunkte wirkenden Kräfte sich aufheben, d. h. eine Mittelkraft von der Grösse Null liefern.

Diese Mittelkraft Null verrichtet bei jeder Bewegung des Massenpunktes auch eine Arbeit von der Grösse Null. Da nun für einen Massenpunkt die Arbeit der Mittelkraft gleich der Arbeitssumme der Einzelkräfte ist (nach 1. Theil, S. 43), so muss, wenn die an einem Massenpunkte wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sein sollen, die Arbeitssumme dieser Kräfte bei jeder Bewegung des Massenpunktes sich zu Null ergeben. Auch wenn der Massenpunkt in Wirklichkeit sich gar nicht bewegt, kann man, um aus der Nullsetzung der Arbeitssumme der an ihm wirkenden Kräfte die erforderlichen Bedingungen für das Gleichgewicht dieser Kräfte abzuleiten, ihm irgend eine beliebige Bewegung ertheilt denken und kann diese gedachte Bewegung stets so wählen, wie es für die gerade gewünschte Bedingungsgleichung zweckmässig erscheint.

Fig. 120.

Befindet sich z. B. ein Massenpunkt in Ruhe unter Einwirkung eines gegebenen Gewichtes Q und zweier Kräfte K_1 und K_2, deren Grössen unbekannt sind, deren Richtungen aber mit der Lothrechten gegebene Winkel α_1 und α_2 bilden (Fig. 120), so kann man die Grössen der Kräfte K_1 und K_2 durch Nullsetzung der Arbeitssumme bei zwei beliebigen Bewegungen finden. Denkt man zunächst dem Massenpunkt eine wagerechte Bewegung AB ertheilt, so verrichtet die Schwerkraft Q dabei keine Arbeit (nach 1. Theil, S. 42/43), weil Q rechtwinklig zu AB ist. Die Wegeslänge AB giebt auf der Richtung von K_1 eine Projektion $AB \cdot \sin \alpha_1$, auf der Richtung von K_2 eine Projektion $-AB \cdot \sin \alpha_2$. Sonach liefert die Nullsetzung der Arbeitssumme

$$0 = K_1 \cdot AB \cdot \sin \alpha_1 - K_2 \cdot AB \cdot \sin \alpha_2 \quad \text{oder}$$

$$1) \qquad 0 = K_1 \cdot \sin \alpha_1 - K_2 \sin \alpha_2 .$$

Denkt man dagegen dem Massenpunkt eine lothrechte Bewegung AC ertheilt (Fig. 121), so verrichtet

$$\begin{array}{lll} Q & \text{die Arbeit} & -Q \cdot AC, \\ K_1 & \text{„} \quad \text{„} & K_1 \cdot AC \cdot \cos \alpha_1, \\ K_2 & \text{„} \quad \text{„} & K_2 \cdot AC \cdot \cos \alpha_2 . \end{array}$$

Sonach liefert die Nullsetzung der Arbeitssumme:

$$0 = -Q \cdot AC + K_1 \cdot AC \cdot \cos\alpha_1 + K_2 \cdot AC \cdot \cos\alpha_2 \quad \text{oder}$$

2) $$0 = -Q + K_1 \cos\alpha_1 + K_2 \cos\alpha_2 .$$

Diese Gleichungen 1 und 2 sind offenbar nichts anderes als die im 1. Theil, S. 65 gegebene Regel: Es muss die Summe aller wagerechten Seitenkräfte Null sein und die Summe aller lothrechten Seitenkräfte ebenfalls. Nach Gl. 1 ist

Fig. 121.

$$K_2 = K_1 \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2};$$

setzt man dies in Gl. 2 ein, so wird

$$Q = K_1 \cos\alpha_1 + K_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cos\alpha_2$$

$$= K_1 \frac{(\sin\alpha_2 \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 \sin\alpha_1)}{\sin\alpha_2} \quad \text{oder}$$

3) $$K_1 = Q \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}; \quad \text{ebenso wird}$$

4) $$K_2 = Q \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Diese gedachten Bewegungen AB und AC waren für die Berechnung von K_1 und K_2 nicht gerade sehr bequem, weil sie auf zwei Gleichungen mit je zwei Unbekannten führten. Man kann die gedachte Bewegung aber auch so einrichten, dass man für jede der Unbekannten nur je eine Gleichung bekommt. Wählt man die gedachte Bewegung AD rechtwinklig zu K_2 (Fig. 122), so verrichtet K_2 bei der Bewegung AD die Arbeit Null; AD liefert auf den Richtungen K_1 und Q die Projektionen $AD \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$ bezw. $-AD \cdot \sin\alpha_2$. Die Nullsetzung der Arbeitssumme giebt:

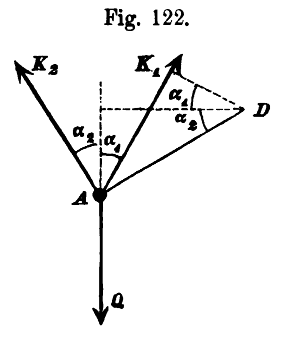


Fig. 122.

$$0 = K_1 \cdot AD \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - Q \cdot AD \cdot \sin\alpha_2$$

und führt unmittelbar auf Gl. 3. Man kann also durch zweckmässige Wahl der gedachten Bewegung denselben Vortheil erreichen

wie durch Anwendung der Momenten-Gleichung unter Benutzung eines auf der Richtungslinie von K_2 gelegenen Drehpunktes (vergl. 1. Theil, S. 160; 2. Theil, S. 73). Dieses Verfahren wird besonders dann werthvoll sein, wenn es sich gar nicht um die Entwickelung aller unbekannten Kräfte handelt, sondern z B. in dem Falle der Fig. 122 vielleicht nur K_1 ermittelt werden soll.

Wendet man dies nun auf eine Massengruppe an, so kann man jedem Punkte derselben beliebige Bewegungen ertheilt denken und die für jeden Punkt berechnete Arbeitssumme gleich Null setzen. Solche ganz willkürliche Lageänderungen nennt man Verrückungen. An jedem Punkte muss die Arbeitssumme von der Grösse Null sein, mithin auch die Arbeitssumme der ganzen Massengruppe. Daher hat man den **Satz der willkürlichen Verrückungen:** Ist eine Massengruppe im Gleichgewichte, so muss die Summe der von sämmtlichen an der Massengruppe wirkenden Kräften bei jeder willkürlichen oder gedachten Verrückung verichteten Arbeiten sich gleich Null ergeben.

In dieser allgemeinen Form freilich ist vorstehender Satz wenig verwendbar, denn in den meisten Fällen der Anwendung besteht die Massengruppe aus sehr vielen Punkten, die durch Kräfte auf einander wirken, so dass in der Arbeitssumme sehr viel Unbekannte auftreten würden. Die Kräfte lassen sich aber derartig in 2 Gruppen zerlegen, dass die Arbeitssumme der einen Gruppe unter gewissen Bedingungen ohne besondere Untersuchung gleich Null gesetzt werden kann, so dass man nur noch die Arbeitssumme der zweiten Gruppe aufzustellen braucht. In vielen Fällen nämlich sind die einzelnen Massenpunkte nicht ganz frei beweglich, sondern hinsichtlich ihrer Verrückbarkeit an bestimmte Bedingungen gebunden, die sich durch geometrische Gleichungen ausdrücken lassen. Jede Beschränkung der freien Beweglichkeit kann aber auch aufgefasst werden als Wirkung von Kräften, die genau so beschaffen sind, dass sie eine Abweichung von den beschränkenden Bedingungen verhindern. Diese Kräfte mögen Bedingungs- oder bedingte Kräfte genannt werden, während die übrigen Kräfte als unbedingte Kräfte bezeichnet werden sollen.

Bei einer ganz willkürlichen Verrückung der Massenpunkte, welche auf die beschränkenden Bedingungen keine Rücksicht nimmt, würden sowohl die bedingten, wie auch die unbedingten Kräfte

Arbeiten ergeben; ertheilt man aber der Massengruppe nur solche Verrückungen, welche mit den die freie Beweglichkeit beschränkenden Bedingungen verträglich sind, so liefern, wie sich zeigen lässst, die bedingten Kräfte für sich allein die Arbeitssumme Null, so dass man dann zur Prüfung des Gleichgewichtszustandes nur die Arbeitssumme der unbedingten Kräfte gleich Null zu setzen braucht. Solche mit gegebenen Bedingungsgleichungen verträgliche Bewegungen einer Massengruppe nennt man **virtuelle Verrückungen** (von virtus = Fähigkeit, Möglichkeit) und die dabei sich ergebenden Arbeiten der bedingten Kräfte **virtuelle Arbeiten.**

Die Beschränkungen der freien Beweglichkeit können verschiedener Art sein:

1. Es können einzelne Punkte unbeweglich, also feste Punkte sein. Sind x, y, z die Koordinaten eines solchen Punktes P, so sind die geometrischen Bedingungsgleichungen für die Unbeweglichkeit:

$$x = a; \quad y = b; \quad z = c,$$

worin a, b, c unveränderliche Grössen bedeuten sollen. Die entsprechende Bedingungskraft ist aber ein Widerstand W, der den Punkt P unbeweglich erhält. Virtuelle Verrückungen würden in diesem Falle solche sein, bei denen der Punkt P seine Lage nicht ändert; dann ergiebt aber auch die bedingte Kraft W keine Arbeit.

2. Es können einzelne Punkte gezwungen sein, auf gegebenen Flächen zu verbleiben. Für einen solchen Punkt wäre dann die Gleichung der Fläche $f(x, y, z) = 0$ die Bedingungsgleichung, der Normalwiderstand N der Fläche die Bedingungskraft. Virtuelle Verrückungen wären solche, bei denen der betreffende Punkt längs der Fläche, d. h. rechtwinklig zu N bewegt wird, wobei (nach 1. Theil, S. 42/43) von N keine Arbeit verrichtet wird.

3. Es kann auch ein Theil der Punkte mit einander in starrer Verbindung sein. Die Bedingungsgleichungen sind dann von der Form

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = a^2,$$

wenn x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Koordinaten zweier Punkte und a eine unveränderliche Länge ist. Die Bedingungskräfte sind die inneren Kräfte des starren Körpertheiles, virtuelle Verrückungen solche, bei denen die starr verbundenen Punkte ihre gegenseitigen Abstände

nicht ändern. Die virtuellen Arbeiten der bedingten Kräfte sind dann (nach 1. Theil, S. 144) Null. Auch bei einer Verbindung einzelner Massentheile durch Ketten, Fäden oder dergl. von unveränderlicher Länge sind die virtuellen Arbeiten Null, wenn die Ketten oder Fäden bei der Verrückung nicht schlaff werden.

Auch jeder beliebige Theil eines elastisch-festen oder flüssigen Körpers oder überhaupt einer beliebig veränderlichen Massengruppe kann, wenn er im Gleichgewicht ist, hinsichtlich der Bedingungen des Gleichgewichts wie ein starrer Körper, wie eine Gruppe von starr mit einander verbundenen Massenpunkten behandelt werden. Denn es muss die Arbeitssumme aller an dem betreffenden Theile wirkenden Kräfte (nach S. 153) bei jeder willkürlichen Verrückung Null sein. Als Verrückung kann man daher auch eine solche wählen, bei der die einzelnen Massenpunkte genau in ihrer gegenseitigen Lage verbleiben. D. h. man kann sich jeden beliebigen Theil einer im Gleichgewichte befindlichen Massengruppe, z. B. eines elastisch-festen oder flüssigen Körpers, zur Untersuchung der **Bedingungen** des Gleichgewichts erstarrt denken und auf ihn die Bedingungen des Gleichgewichts starrer Körper anwenden. Die inneren Kräfte der Massengruppe, also die Spannkräfte elastisch fester Körper, sowie die inneren Normalkräfte flüssiger Körper sind dann bedingte Kräfte und liefern (vergl. a. 2. Theil, S. 231) daher keine Arbeit.

Die sechs Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht starrer Körper (s. 1. Theil, S. 146) sind mittels des S. 157 folgenden Satzes der virtuellen Verrückungen sehr leicht zu finden. Die inneren Kräfte kommen dabei nicht in Frage. Sind K_1, K_2 .... die äusseren Kräfte, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 .... die Winkel derselben gegen drei rechtwinklig zu einander stehende Achsen, so ergiebt sich, wenn man dem Körper eine Parallelverschiebung parallel der x-Achse um dx ertheilt, die Arbeitssumme $\Sigma K \cdot \cos\alpha \,.\, dx = dx\,\Sigma K \cos\alpha$. Diese muss Null sein, mithin

1) $\Sigma K \cos\alpha = 0$; ebenso

2) $\Sigma K \cos\beta = 0$;

3) $\Sigma K \cos\gamma = 0$.

Ertheilt man nun dem Körper eine Drehung um die x-Achse mit dem Drehungswinkel $\omega \cdot dt$, so ist, wenn man mit $\mathfrak{M}_x$ die Summe der Momente der Kräfte K in Bezug auf die x-Achse bezeichnet und zugleich bedenkt, dass nach 1. Theil, S. 221 die Arbeit eines Kräftepaars gleich seinem Momente mal dem Drehungswinkel ist, die virtuelle Arbeit

$$0 = \mathfrak{M}_x \cdot \omega \cdot dt, \quad \text{mithin}$$

4) $$\mathfrak{M}_x = 0; \quad \text{ebenso}$$

5) $$\mathfrak{M}_y = 0;$$

6) $$\mathfrak{M}_z = 0.$$

4. Wenn die Theile eines Triebwerkes, Zahnräder (Fig. 123), Reibungsräder, Riemenscheiben (Fig. 124) u. dergl. derartig in einander greifen oder mit einander gekuppelt sind, dass sie an den Stellen des Eingriffes oder der Kuppelung Geschwindigkeiten von genau derselben Grösse haben müssen, so liegen in dem geometrischen Zusammenhange des Triebwerkes die Bedingungsgleichungen. Die bedingten Kräfte sind die durch den Eingriff oder die Kuppelung ausgeübten. Da diese auf die mit einander gekuppelten Maschinentheile gleich und entgegengesetzt wirken, ihre Angriffspunkte auch genau gleiche Geschwindigkeiten haben, so verrichten diese Kräfte bei jeder virtuellen, d. h. mit dem geometrischen Zusammenhange verträglichen Verrückung Arbeiten, die sich gegenseitig aufheben.

Fig. 123.

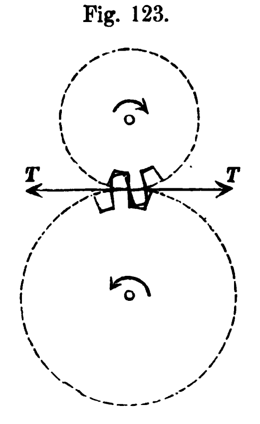
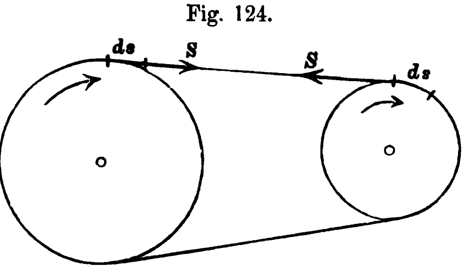


Fig. 124.



Unter einen dieser vier Hauptfälle ist jede Aufgabe zu bringen, bei welcher eine Massengruppe im Gleichgewicht ist und zugleich durch gewisse Bedingungsgleichungen in der freien Beweglichkeit der einzelnen Punkte beschränkt ist.

Da der Gleichgewichtszustand in manchen Fällen nur bei einer bestimmten Lage der Massengruppe besteht, also bei einer endlichen Verrückung gestört werden könnte, so darf man im Allgemeinen zur Ermittelung der Bedingungen des Gleichgewichts nur unendlich kleine Verrückungen benutzen.

Hiernach lautet der **Satz der virtuellen Verrückungen:**

Befindet sich eine Massengruppe im Gleichgewichte, so ist für jede unendlich kleine virtuelle Verrückung die Arbeitssumme der unbedingten Kräfte gleich Null; die Arbeiten dieser unbedingten Kräfte bei virtuellen Verrückungen heissen virtuelle Arbeiten. Die Normalwiderstände einer vorgeschriebenen Fläche oder Linie, die Kräfte, welche Zahnräder auf einander ausüben, sind zwar bedingte Kräfte, die keine virtuellen Arbeiten liefern; dies gilt aber nicht von etwaigen Reibungswiderständen, die beim Gleiten unter Einwirkung dieser Kräfte entstehen und von ihnen abhängig sind. Die Reibungswiderstände verrichten auch bei virtuellen Verrückungen Arbeit und sind deshalb den unbedingten Kräften beizuzählen. Aus diesem Grunde eignet sich der Satz der virtuellen Verrückungen besonders für die Behandlung solcher Aufgaben, bei denen Reibungswiderstände nicht zu berücksichtigen sind, so dass dann auch die betreffenden Normaldrücke gar nicht ermittelt zu werden brauchen.

2. Anwendungen der Sätze der willkürlichen bezw. der virtuellen Verrückungen.

a) Hebel.

Es sei O (Fig. 125) die feste Drehachse des Hebels, A der Angriffspunkt der Last Q, B derjenige der bewegenden Kraft K. Drehachse und Gelenkbolzen seien reibungslos. Eine unendlich kleine virtuelle Verrückung besteht in einer unendlich kleinen Drehung des Hebels um die feste Achse O. Der Drehungswinkel sei $d\alpha$. Dann beschreiben A und B Drehungsbogen

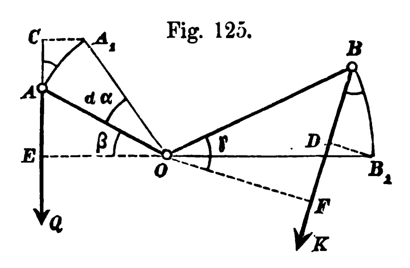


Fig. 125.

$$\widehat{AA_1} = \overline{AO} \cdot d\alpha \quad \text{und} \quad \widehat{BB_1} = \overline{BO} \cdot d\alpha,$$

welche als geradlinig und rechtwinklig zu AO und BO angesehen werden können. Ist β der Winkel, den AO mit der Rechtwinkligen OE zu der Last Q bildet, so findet sich der gleiche Winkel β auch zwischen AA_1 und der Last Q, so dass die Projektion von AA_1 auf die Richtung von Q ist

$$AC = AA_1 \cos\beta = AO \cdot d\alpha \cdot \cos\beta = OE \cdot d\alpha.$$

Ebenso wird auf der rechten Seite

$$BD = BB_1 \cdot \cos\gamma = OB \cdot \cos\gamma \cdot d\alpha = OF \cdot d\alpha.$$

Der Widerstand der Drehachse O sowie die inneren Spannungen des als starr angenommenen Hebels sind bedingte Kräfte. Unbedingte Kräfte sind nur die Last Q und die treibende Kraft K; daher gilt nach dem Satze der virtuellen Verrückungen

$$0 = -Q \cdot AC + K \cdot BD, \quad \text{oder}$$

$$K \cdot OF \cdot d\alpha = Q \cdot OE \cdot d\alpha, \quad \text{d. h.}$$

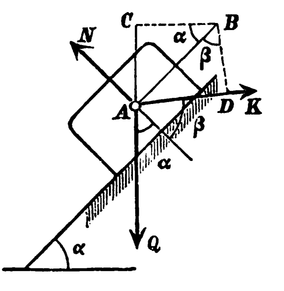
$$K \cdot OF = Q \cdot OE.$$

Dies ist nichts anderes als die Momentengleichung für den Hebel in Bezug auf seine Drehachse (s. 1. Theil, S. 151).

b) Schiefe Ebene.

Soll ein Körper vom Gewichte Q auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel α durch eine Kraft K, welche mit der Normalen der Ebene den Winkel β einschliesst, gleichförmig aufwärts gezogen werden (Fig. 126) und soll dabei die Reibung zunächst unberücksichtigt bleiben, so fassen wir eine Gleitbewegung des Körpers längs der Ebene um die Strecke AB als virtuelle Verrückung auf. Dann kann man den Normalwiderstand N als bedingte Kraft ausser Acht lassen. Es ist

Fig. 126.



$\measuredangle ABC = \alpha$; $\measuredangle ABD = \beta$, somit

$$1) \qquad 0 = -Q \cdot AB \cdot \sin\alpha + K \cdot AB \cdot \sin\beta, \quad \text{oder}$$

$$2) \qquad K = Q \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Diese Gleichung gilt auch für gleichförmige Abwärtsbewegung und auch für die Ruhe des Körpers.

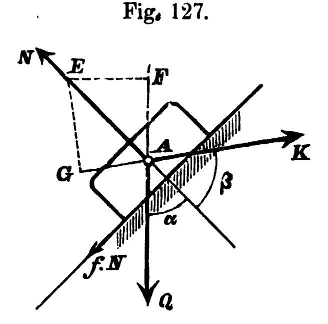
Soll aber die Reibung $f \cdot N$ mit berücksichtigt werden, etwa für die Aufwärtsbewegung, so ergiebt sich zunächst leicht wie Gl. 1:

$$0 = -Q \cdot AB \cdot \sin\alpha + K \cdot AB \cdot \sin\beta - fN \cdot AB, \quad \text{oder}$$

$$3) \qquad K \cdot \sin\beta = Q \cdot \sin\alpha + fN.$$

Nun aber muss man noch N finden, und dies ist mittels einer virtuellen Verrückung, d. h. einer solchen längs der Ebene, nicht möglich; man muss hierzu den allgemeinen Satz der willkürlichen Verrückungen (S. 153) anwenden. Wir ertheilen (Fig. 127) dem Körper eine Parallelverschiebung um die Strecke AE im Sinne von N und behandeln diese nur insofern als eine virtuelle Verrückung in beschränkter Form, indem wir den Körper als eine starre Massengruppe sich parallel verschieben lassen. N gehört nun zu den unbedingten Kräften. Der Verschiebungsweg AE giebt auf den Richtungen von Q, K und $f \cdot N$ die Projektionen: $AE \cdot \cos\alpha$; $AE \cdot \cos\beta$ und Null. Daher wird

Fig. 127.



$$0 = N \cdot AE - Q \cdot AE \cdot \cos\alpha - K \cdot AE \cdot \cos\beta, \quad \text{also}$$

$$N = Q \cdot \cos\alpha + K \cdot \cos\beta.$$

Setzt man dies in Gl. 3 ein, so ergiebt sich

$$K \sin\beta = Q \sin\alpha + fQ\cos\alpha + fK\cos\beta \quad \text{oder}$$

$$K = Q\,\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\sin\beta - f\cos\beta}.$$

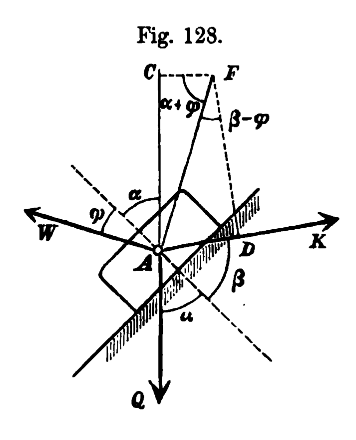
Vertauscht man noch f mit $\operatorname{tg}\varphi$ (φ = Reibungswinkel) und multiplicirt in Zähler und Nenner mit $\cos\varphi$, so lässt sich die letzte Gleichung leicht zusammenziehen in

$$4) \qquad K = Q\,\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\beta - \varphi)}$$

(vergl. 1. Theil, S. 195, Gl. 6).

Allerdings kann man diese Gleichung auch unmittelbar erhalten, indem man für den zu betrachtenden Sinn der Gleitbewegung (in diesem Fall also nach aufwärts) die Richtung des Gesammtwiderstandes W der schiefen Ebene, d. h. der Mittelkraft aus N und $f \cdot N$, bestimmt, welche von N um den Reibungswinkel φ abweicht, und dem Körper dann eine Verschiebung AF, rechtwinklig zu W ertheilt (Fig. 128). Sind dann AC und AD die rechtwinkligen Projektionen von AF auf Q und K, so ist $\sphericalangle AFC = \alpha + \varphi$, $\sphericalangle AFD = \beta - \varphi$; die Projektion von AF auf W wird Null, und es muss

Fig. 128.

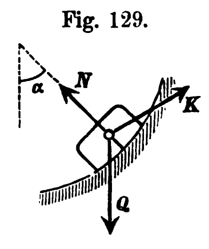


$$0 = -Q \cdot \overline{AF} \cdot \sin(\alpha + \varphi) + K \cdot \overline{AF} \cdot \sin(\beta - \varphi)$$

sein, woraus sich Gl. 4 ergiebt.

Längs derselben schiefen Ebene bleiben die Gleichgewichtsbedingungen überall dieselben; daher war es in diesem Falle gleichgültig, ob die Verrückung endlich oder unendlich klein gewählt wurde. Sollte aber der Körper auf einer gekrümmten Fläche durch die Kraft K gehalten, oder langsam aufwärts bewegt oder auch langsam hinabgelassen werden (Fig. 129), so würde die Kraft K von dem Winkel α abhängig sein; daher muss man in diesem Fall unendlich kleine Verrückungen benutzen.

Fig. 129.



Geschichtliches. Aus der Behandlung des Körpers auf schiefer Ebene ist leicht zu erkennen, dass die Benutzung des Satzes der virtuellen Verrückungen eigentlich nur für solche Fälle bequem ist, bei denen die Reibung nicht berücksichtigt werden soll. Dieses Ergebnis prägt sich auch in der Weise aus, wie der Satz in der Mechanik Anwendung gefunden hat. Er wurde nämlich für den Hebel, für Rollen und Flaschenzüge von Stevin (geb. 1548 zu Brügge, gest. 1620 zu Haag) als gültig erkannt, für die schiefe Ebene und den Keil 1655 von Galilei (geb. 18. Februar 1564 zu Pisa, gest. 8. Januar 1642 zu Arcetri). Joh. Bernoulli (geb. 1667 zu

Basel, gest. daselbst 1748) zeigte 1717, dass der allgemeine Satz der willkürlichen Verrückungen zur Lösung aller Aufgaben des Gleichgewichts benutzt werden könne, und Lagrange (geb. 1736 zu Turin, gest. 1813 zu Paris) hat ihn 1788 zu einer der Grundlagen seines Werkes über analytische Mechanik gemacht. Bis gegen das Ende des 18. Jahrhunderts berechnete man die Wirkung von Maschinen noch ohne eingehende Berücksichtigung der Reibung und konnte daher mit der Behandlung einer Maschine als Ganzes nach dem Satze der virtuellen Verrückungen sich begnügen. Die Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper wurden von Poinsot (geb. 1774 zu Paris, gest. daselbst 1859) in der jetzt gebräuchlichen Form entwickelt.

Mit den Fortschritten des Maschinenbaues ergab sich die Nothwendigkeit einer genaueren Berechnung unter Berücksichtigung aller Reibungswiderstände; dies führte zu einer eingehenden Betrachtung der einzelnen Maschinentheile und aller an ihnen auftretenden Kräfte, wozu die Gleichgewichtsbedingungen in der im 1. Theile, S. 146 mitgetheilten Form besser geeignet waren als der Satz der willkürlichen Verrückungen. Erleichtert wurden diese Rechnungen noch durch die Benutzung des Reibungswinkels (s. 1. Theil, S. 190), des Kraftecks und des Seilecks (s. 1. Theil, S. 118). Erneute Anwendung hat nun aber der Satz der virtuellen Verrückungen gefunden für die Berechnung der Fachwerke, u. zw. 1864 durch Clerk Maxwell (geb. 1830, gest. 1879) und im Jahre 1874 durch Mohr in Dresden (s. Keck, Elasticitätslehre, S. 207).

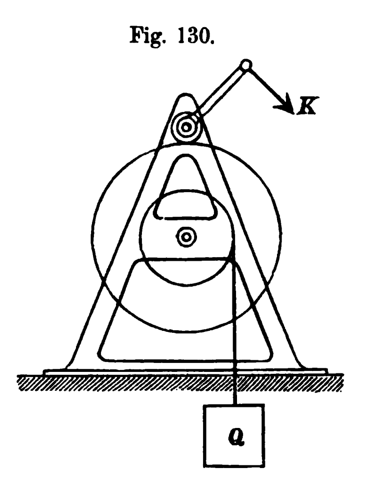
Da die Fachwerke als Verbindungen von Stäben mit reibungslosen Gelenken aufgefasst werden, so sind sie für die Anwendung des Satzes der virtuellen Verrückungen in hervorragender Weise geeignet (s. Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 207, 250, 255).

c) Aufzugsmaschinen.

Bei der in Fig. 130 dargestellten Bockwinde sind die einzelnen Theile des Triebwerkes derartig mit einander verkuppelt, dass irgend einer Geschwindigkeit v der Kurbel eine dadurch genau bestimmte Geschwindigkeit c der Last Q entspricht. Es ist $v:c$ das durch den geometrischen Zusammenhang bedingte Uebersetzungsverhältnis der Winde. Die Triebkraft K und die Last Q sind die

einzigen unbedingten Kräfte, während alle anderen Kräfte, nämlich die inneren Spannungen der Kurbel, des Kurbelarmes und der übrigen Theile des Triebwerks und des Gestelles, die Widerstände der Achsen, die Kräfte zwischen den Zähnen zu den bedingten Kräften gehören. Unter Vernachlässigung der Reibungswiderstände wird dann für ein Zeittheilchen dt

Fig. 130.



$$0 = K \cdot v \cdot dt - Q \cdot c \cdot dt$$

oder $Q : K = v : c$. Hierin liegt der schon von Galilei ausgesprochene Satz: „Was an Kraft gewonnen wird, geht an Geschwindigkeit verloren“ (s. 1. Theil, S. 215). Aus der hier benutzten Weise der Herleitung erkennt man, dass der Satz für alle einfachen Maschinen gelten muss, solange man die Reibungswiderstände vernachlässigt.

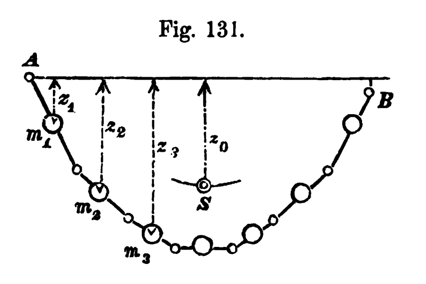
Ein Körper, der an einem Punkt oder einer Achse befestigt ist, kann im Gleichgewichtszustande sich nur befinden, indem er ruht; denn die Drehbewegung um den festen Punkt oder die feste Achse, welche die einzig möglichen Bewegungen sind, ertheilen den einzelnen Massenpunkten krummlinige Bewegungen, während das Gleichgewicht eines Massenpunktes durch Ruhe oder geradlinige, gleichförmige Bewegung bedingt ist. Ertheilt man aber der Kurbel der in Fig. 130 dargestellten Bockwinde eine gleichmässige Drehbewegung, so wird, wie die vorstehende Entwickelung zeigt, die Summe der virtuellen Arbeiten gleich Null. Wollte man also den auf S. 157 ausgesprochenen Satz der virtuellen Verrückungen in der umgekehrten Fassung bringen: Eine Massengruppe befindet sich im Gleichgewichte, wenn für jede unendlich kleine virtuelle Verrückung die Arbeitssumme der unbedingten Kräfte gleich Null ist, so müsste noch hinzugefügt werden: unter der Voraussetzung, dass in der Massengruppe nicht etwa schon Winkelgeschwindigkeiten um feste Achsen oder Punkte bestehen. Denn der Umstand,

dass die virtuelle Arbeit Null ist, schliesst nur beschleunigte, nicht aber gleichförmige Drehbewegungen aus. Eine gleichförmige Drehung hat auf die Beziehung zwischen den unbedingten Kräften keinen Einfluss, wenn man von der Reibung absieht. Durch eine solche Drehung werden in den umlaufenden Theilen besondere, von der Winkelgeschwindigkeit abhängende Spannungen (s. 2. Theil, S. 93) hervorgerufen; im Allgemeinen werden auch die Widerstände der festen Achsen dadurch beeinflusst; doch fällt der letztere Einfluss fort, wenn die Drehachsen freie Achsen sind (s. 1. Theil, S. 289). Die durch die Umlaufgeschwindigkeit erzeugten inneren Spannungen sind in sehr vielen Fällen, z. B. bei den durch Muskelkraft bewegten Aufzugsmaschinen, im Vergleiche mit den bei der Geschwindigkeit Null auftretenden Spannungen verschwindend klein; daher man auf den Unterschied zwischen gleichförmiger Drehbewegung und Ruhezustand meist gar keine Rücksicht nimmt. Bei Körpern mit grosser Umlaufgeschwindigkeit, z. B. Schwungrädern, Mühlsteinen (s. 2. Theil, S. 96), Schleudermaschinen (s. 2. Theil, S. 201) haben diese Spannungen aber mafsgebende Bedeutung.

d) Gelenkstangen-Verbindungen.

A und B (Fig. 131) seien die Aufhängegelenke einer Gelenkstangen-Verbindung. Die einzelnen Stäbe seien starr und durch reibungslose Gelenke mit einander verbunden. Das Gewicht jedes Stabes sei zu einem Massenpunkt m vereinigt gedacht. Diese Massen m_1, m_2, m_3 ... mögen um z_1, z_2, z_3 ... unter einer festen wagerechten Ebene liegen; es soll eine Beziehung für die Ruhelage der Stangenverbindung gesucht werden.

Fig. 131.



Wird der Stangenverbindung eine unendlich kleine virtuelle Verrückung aus der Ruhelage ertheilt, so sind die inneren Spannkräfte der Stäbe, die Widerstände der Widerlagergelenke, die gegenseitigen Kräfte in den Zwischengelenken durchweg bedingte Kräfte; virtuelle Arbeiten werden nur von den Gewichten $m_1 g$, $m_2 g$ ....

verrichtet. Erfährt nun eine der Massen m bei der unendlich kleinen Verrückung eine Senkung um dz, so ist die entsprechende virtuelle Arbeit $mg \cdot dz$, und es muss, von der Ruhelage aus gerechnet,

$$0 = \Sigma(mg \cdot dz) = g\left\{m_1 \cdot dz_1 + m_2 \cdot dz_2 + \dots\right\} \text{ sein.}$$

Dafür kann man, weil die Massen unveränderlich sind, auch schreiben

$$0 = g \cdot d(m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots).$$

Hat der Schwerpunkt S der Massen m in der Ruhelage eine Tiefe z_0 unter der festen wagerechten Ebene, so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte

$$\Sigma m \cdot z = M \cdot z_0$$

(s. 1. Theil, S. 139), wenn $M = \Sigma m$ die Gesammtmasse bedeutet. Daher wird

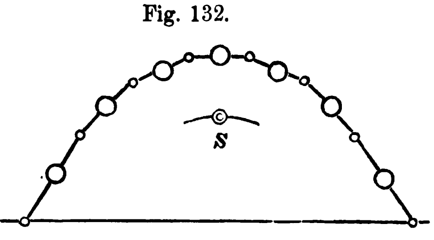
$$0 = d(M \cdot z_0) = M \cdot dz_0 \quad \text{oder} \quad dz_0 = 0$$

die Bedingung für die Ruhelage der Gelenkstangen-Verbindung.

Bei einer unendlich kleinen virtuellen Verrückung darf der Schwerpunkt der gesammten Masse sich weder heben noch senken, d. h. er muss in der Ruhelage entweder möglichst tief oder möglichst hoch liegen.

Befindet sich der Schwerpunkt S in der Ruhelage so tief wie möglich, so wird einer endlichen virtuellen Verrückung eine Bahnlinie des Schwerpunktes entsprechen, wie in Fig. 131 angedeutet. Erfolgt die Verrückung aus der Gleichgewichtslage etwa durch einen leichten seitlichen Stoss, welcher der Massengruppe ein gewisses Arbeitsvermögen ertheilt, so wird dieses bei der nunmehr erfolgenden Hebung des Schwerpunktes aus der tiefsten Lage durch die negative Arbeit der Schwere aufgezehrt; die Massengruppe erhält die Geschwindigkeit Null, wird dann durch die Schwere zu der ursprünglichen Gleichgewichtslage zurückgeführt, führt um diese Schwingungen aus und kommt, nachdem letztere durch Widerstände vernichtet sind, schliesslich in der sicheren (stabilen) Gleichgewichtslage zur Ruhe. Lag der Schwerpunkt aber im Gleichgewichtszustande so hoch wie möglich (Fig. 132), so wird der,

Fig. 132.

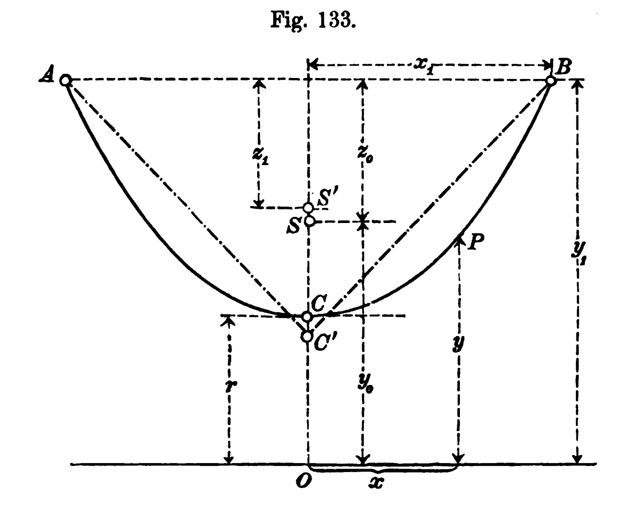


einem kleinen Anstoſse folgenden Senkung des Schwerpunktes eine positive Arbeit der Schwere entsprechen, d. h. die Massengruppe wird sich beschleunigt immer weiter aus der ursprünglichen Ruhelage entfernen und erst in einer neuen sicheren Gleichgewichtslage mit tief liegendem Schwerpunkte zur Ruhe gelangen.

Die tiefste Lage des Schwerpunktes entspricht also der natürlichen sicheren Gleichgewichtsform, die höchste Lage der künstlichen, unsicheren (labilen) Gleichgewichtsform. Bei unendlich vielen Stangen geht die erstere Form in die Kettenlinie, die zweite Form in die Drucklinie über (s. Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 315).

Die Gleichgewichtsform einer Kette, die der Bogenlänge nach geichmässig belastet wird, ist die gemeine Kettenlinie

Fig. 133.



(Fig. 133), deren Gleichung, bezogen auf den Anfangspunkt O, (nach Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 317) lautet:

$$1)\qquad y = {}^1/_2\, r \left(e^{\frac{x}{r}} + e^{-\frac{x}{r}}\right).$$

Darin bedeutet r den Krümmungshalbmesser im Scheitel C. Da dem sicheren Gleichgewichtszustande die möglichst tiefe Lage des Schwerpunktes entspricht, so kann man auch aus dieser Bedingung die Gleichung der gemeinen Kettenlinie finden, indem man die

Frage stellt: Nach welcher Kurve muss eine bei A und B befestigte Kette von gegebener Länge geformt sein, damit ihr Schwerpunkt so tief wie möglich liege. Die Lösung dieser Aufgabe mit Hülfe der Variationsrechnung führt thatsächlich auf die Gleichung 1. Diese Behandlung überschreitet den Rahmen unseres Buches; doch möge der Nachweis geführt werden, dass, wenn man die im Gleichgewichte befindliche Kette ACB bei C lothrecht abwärts zieht und dadurch (annähernd) in die geknickte Form $AC'B$ überführt, der Gesammtschwerpunkt sich von S nach S' hebt.

Hat der Aufhängepunkt B die Koordinaten x_1 und y_1, so findet man die Bogenlänge $CB = s$ leicht zu

$$2)\qquad s = {}^1/_2\, r \left(e^{\frac{x_1}{r}} - e^{-\frac{x_1}{r}}\right).$$

Für die Höhe des Schwerpunktes S der Kettenlinie $ACB = 2s$ über O gilt dann, wenn man den Faktor 2 beiderseits fortlässt:

$$s \cdot y_0 = \int_0^{x_1} ds \cdot y = \frac{1}{r} \int_0^{x_1} y^2 \cdot dx,$$

weil, wie man leicht erkennt,

$$ds = \frac{1}{r} \cdot y \cdot dx \quad \text{ist.}$$

Dann wird
$$s \cdot y_0 = \frac{r}{4} \int_0^{x_1} \left(e^{\frac{2x}{r}} + 2 + e^{-\frac{2x}{r}}\right) dx \quad \text{oder}$$

$$s \cdot y_0 = \frac{r \cdot x_1}{2} + \frac{r^2}{8} \left(e^{\frac{2x_1}{r}} - e^{-\frac{2x_1}{r}}\right).$$

Weil aber nach Gl. 1 und 2

$$y_1 s = \frac{r^2}{4} \left(e^{\frac{2x_1}{r}} - e^{-\frac{2x_1}{r}}\right),$$

so kann man schreiben

$$s \cdot y_0 = \frac{r \cdot x_1}{2} + \frac{y_1 \cdot s}{2}; \quad \text{mithin}$$

$$y_0 = \frac{r \cdot x_1}{2s} + \frac{y_1}{2},$$

oder für die Tiefe des Schwerpunktes S unter der Sehne AB:

$$z_0 = y_1 - y_0 = \frac{y_1}{2} - \frac{r \cdot x_1}{2s}.$$

Wird die Kette vor der Länge $2s$, aber in die Form $AC'B$ gebracht, so ist $AC' = s$ und die Tiefe des Schwerpunktes unter AB

$$z_1 = \frac{1}{2} \sqrt{s^2 - x_1^2}.$$

Es ist zu beweisen, dass $z_0 > z_1$, oder $z_0^2 > z_1^2$; zu dem Ende setzen wir $z_0^2 - z_1^2 = U$ und untersuchen, ob $U > 0$ ist. Es wird

$$U = \frac{1}{4}\left\{y_1^2 - \frac{2\,y_1 r \cdot x_1}{s} + \frac{r^2 \cdot x_1^2}{s^2} - s^2 + x_1^2\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{x_1^2\left(\frac{r^2 + s^2}{s^2}\right) - \frac{2\,y_1 r \cdot x_1}{s} + y_1^2 - s^2\right\}.$$

Nach den Gl. 1 und 2 findet man leicht

$$r^2 + s^2 = y_1^2;\quad y_1^2 - s^2 = r^2,\quad \text{so dass}$$

$$U = \frac{1}{4}\left\{\frac{x_1^2 \cdot y_1^2}{s^2} - \frac{2\,x_1 y_1 r}{s} + r^2\right\};$$

da dies ein Quadrat ist, nämlich

$$U = \left(\frac{1}{2}\left[\frac{x_1 y_1}{s} - r\right]\right)^2,$$

so ist $U > 0$, also bewiesen, dass $z_0 > z_1$, dass also beim Geradestrecken der Schwerpunkt sich wirklich gehoben hat.

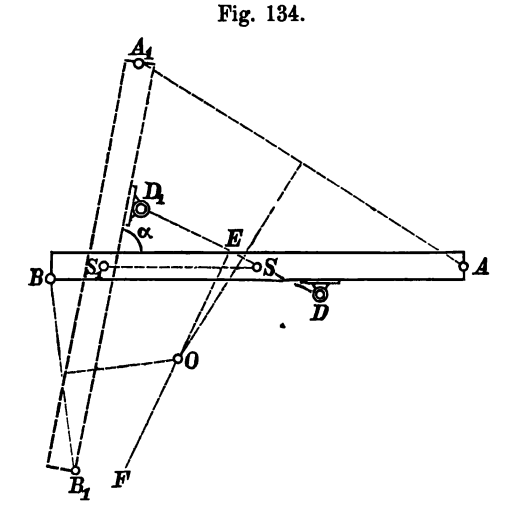
e) Klappbrücken.

Soll ein Getriebe, an welchem als unbedingte Kräfte nur Schwerkräfte wirken, in jeder Lage im Gleichgewichte sein, so dass bei einer langsamen Bewegung nur Reibungswiderstände überwunden zu werden brauchen, so muss für jede Lage

$$dz_0 = 0$$

sein, d. h. es muss die Ordinate z_0 des Schwerpunktes der gesammten Massengruppe stets denselben Werth behalten. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn der Gesammtschwerpunkt sich bei einer virtuellen Verrückung entweder gar nicht bewegt, oder doch stets in derselben wagerechten Ebene verbleibt.

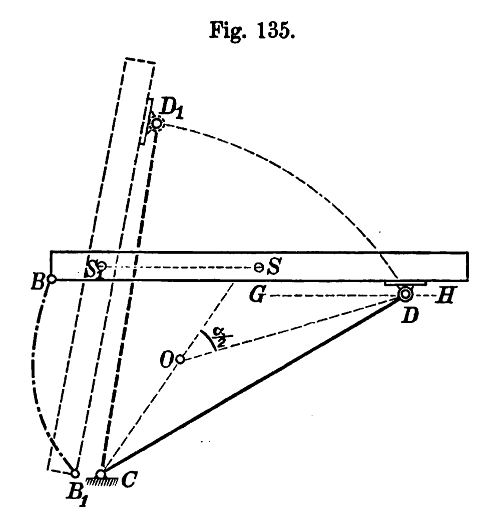
Fig. 134.



Derartige Erwägungen finden Anwendung beim Entwerfen grösserer Klappbrücken. Soll etwa (Fig. 134) der Brückenkörper

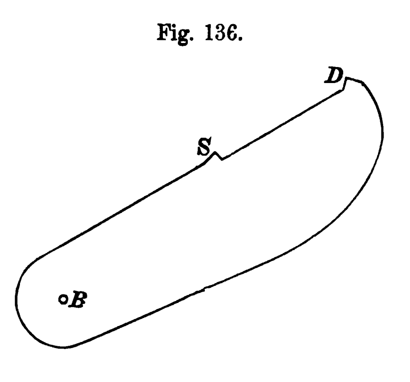
AB in die Lage $A_1 B_1$ gebracht werden, so ist dies nach S. 13 am einfachsten durch Drehung um den Punkt O zu erreichen, den man findet, indem man $\overline{AA_1}$ zieht und in der Mitte derselben eine Winkelrechte errichtet, ebenso B mit B_1 verbindet und in der Mitte von BB_1 eine Normale zu BB_1 zeichnet; dann ist O der Schnittpunkt der beiden Normalen. Bei einer Drehung um O würde aber jeder Punkt, also auch der Schwerpunkt S des Brückenkörpers einen Kreisbogen beschreiben, so dass hierdurch die gestellte Bedingung nicht erfüllt wird. Soll die Bewegung nun so geregelt werden, dass der Schwerpunkt eine Wagerechte beschreibt, so könnte man zunächst auf den Gedanken kommen, den Schwerpunkt unmittelbar längs einer Gleitbahn SS_1 zu führen. Diese Lösung ist aber nicht brauchbar, weil der rechts von der aufgerichteten Klappe befindliche Raum von festen Theilen grösstentheils frei bleiben soll, um Schiffen die Durchfahrt zu gestatten. Man führt daher (Fig. 135) einen dem Schwerpunkte nicht zu nahe liegenden Punkt D des Brückenkörpers mittels einer um einen festen Punkt C drehbaren Gelenkstange in einem Kreisbogen von D nach D_1 und gleichzeitig einen anderen Punkt des Körpers, etwa B, mittels einer Rolle in einer Bahn BB_1, deren Form durch den Kreisbogen DD_1 und die vorgeschriebene gerade Bahn SS_1 des Schwerpunktes völlig bestimmt ist. Nimmt man die Lage des Punktes D am Brückenkörper nach Gutdünken an, so dass dadurch auch D_1 festliegt, so ziehe man (Fig. 134) DD_1 und in der Mitte E von DD_1 eine Rechtwinklige EF zu DD_1. Dann muss der feste Drehpunkt C der Gelenkstange DC jedenfalls auf EF liegen. Da bei einer Drehung des Brückenkörpers um O (Fig. 134) D auch nach D_1 gelangen würde, so muss die Gerade EF auch den

Fig. 135.



Punkte O enthalten. Auf EF kann der Drehpunkt C beliebig gewählt werden. Da aber die Gelenkstange CD in dem geöffneten Zustande der Brücke eine Lage CD_1 (Fig. 135) haben muss, welche den Raum für die freie Durchfahrt nicht beengt, da es ferner für die feste Lagerung des Drehpunktes C erwünscht sein wird, denselben etwa in gleicher Tiefe mit B_1 anzuordnen, so wird die Gerade EF (Fig. 134) vielleicht einen zweckmässig liegenden Drehpunkt C nicht enthalten, so dass also die willkürliche Annahme des Punktes D nicht glücklich war. Man kann dann auch umgekehrt den Drehpunkt C an passend erscheinender Stelle annehmen, für den Angriffspunkt D der Gelenkstange aber vielleicht nur eine gewisse Tiefe, d. h. einen gewissen Abstand von der Brückentafel, gegeben durch eine Gerade GH (Fig. 135), festsetzen und nun die Lage des Angriffspunktes D in der Geraden GH durch Zeichnung in folgender Weise finden. Eine Gerade CO bestimmt diejenige Linie, welche in Fig. 134 EF genannt wurde. Ist nun α der gesammte Winkel, um den die Brückentafel gedreht werden soll, so ist α zugleich der gemeinschaftliche Centriwinkel aller Kreisbögen, die bei einer Drehung um O von sämmtlichen Theilen der Brückenbahn, also auch von D, beschrieben werden würden. Trägt man im Punkte O an die nach oben verlängerte CO den Winkel $^1/_2\,\alpha$ an, so schneidet der zweite Winkelschenkel die GH in D. Hat man somit die Gelenkstange CD festgelegt, so bleibt nur noch die Form des Führungsschlitzes für die bei B anzubringende Leitrolle zu bestimmen. Eine analytische Entwickelung der Gleichung der Bahnlinie BB_1 ist so umständlich, dass man die zeichnerische Ermittelung vorziehen wird. Die in der Brückentafel gegen einander fest liegenden Punkte D, S und B (Fig. 135) bilden ein Dreieck; lässt man D auf dem Kreisbogen DD_1, S auf der Wagerechten SS_1 sich bewegen, so beschreibt B die Bahnlinie BB_1 der Führungsrolle. Man bestimmt daher die Punkte der Kurve BB_1 am bequemsten und sichersten, indem man das Dreieck DSB

Fig. 136.



auf Pauspapier zeichnet oder aus starkem Kartenpapier so ausschneidet (Fig. 136), dass man D und S auf DD_1 bezw. SS_1 verschiedene Lagen geben und bei B jedesmal einen Zirkelstich machen kann.

B. Bewegung einer Massengruppe.

I. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes; Satz vom Antriebe.

Schon im 1. Theil, S. 141 wurden die Gleichungen abgeleitet:

$$1)\qquad \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = X;\quad \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y;\quad \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z.$$

Darin bedeuteten x, y und z die augenblicklichen Koordinaten eines Massenpunktes m,

$$X = \Sigma K \cos\alpha,\quad Y = \Sigma K \cos\beta,\quad Z = \Sigma K \cos\gamma$$

die Summe der in den einzelnen Achsenrichtungen auftretenden Seitenkräfte der äusseren Kräfte K. Daraus folgten nach der Lehre vom Schwerpunkte die Gleichungen

$$2)\qquad \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{X}{M};\quad \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{Y}{M};\quad \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{Z}{M},$$

worin x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Schwerpunktes der Massengruppe bezeichnen, deren Gesammtmasse M ist. Diese Gleichungen 2 enthielten den Satz:

Der Schwerpunkt einer Massengruppe bewegt sich so, als ob die ganze Masse der Gruppe in ihm vereinigt wäre und als ob sämmtliche äussere Kräfte (parallel verschoben) an ihm wirkten. Die inneren Kräfte der Massengruppe haben auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluss.

Sind äussere Kräfte nicht vorhanden, so kann der Schwerpunkt der Massengruppe sich nur geradlinig und gleichförmig bewegen.

Die erste der Gleichungen 1 kann man auch schreiben

$$\Sigma m \cdot \frac{\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\delta t} = X,$$

oder wenn v die Geschwindigkeit eines Punktes, v_x die Seitengeschwindigkeit desselben in der x-Richtung bezeichnet,

$$\frac{\delta \Sigma m v_x}{\delta t} = X.$$

Ist $v = c$ und $v_x = c_x$ für $t = 0$, so ergiebt die Integration vorstehender Gleichung

3) $$\Sigma m v_x - \Sigma m c_x = \int_0^t X \cdot dt.$$

Das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit $= mv$ nennt man die **Bewegungsgrösse** der Masse, mv_x die Bewegungsgrösse in der x-Richtung. Das Produkt aus einer Kraft und der Zeit ihrer Einwirkung $= Kt$ heisst der **Antrieb der Kraft**; für veränderliche Kräfte ist der Antrieb also allgemein $\int K \cdot dt$; es ist $\int_0^t X \cdot dt$ der Antrieb der in der x-Richtung wirkenden äusseren Kräfte.

Gl. 3 stellt den **Satz vom Antrieb und der Bewegungsgrösse,** dar; er lautet in Worten:

In einer bestimmten Achsenrichtung ist während irgend eines Zeitraumes die Zunahme der Bewegungsgrösse einer Massengruppe gleich dem Antriebe der in dieser Richtung wirkenden äusseren Kräfte.

Ist in einer Achsenrichtung die Summe der äusseren Kräfte Null, d. h. $X = \Sigma K \cos \alpha = 0$, so erfährt in dieser Achsenrichtung die gesammte Bewegungsgrösse der Massengruppe keine Änderung.

Wegen $\Sigma m x = M x_0$ ist

4) $$\Sigma m v_x = M \cdot \frac{dx_0}{dt};$$

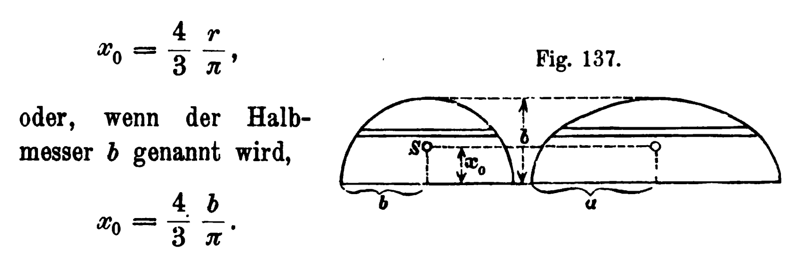
d. h. in einer bestimmten Achsenrichtung ist die Bewegungsgrösse der ganzen Massengruppe gleich der ganzen Masse mal der Geschwindigkeit des Schwerpunktes; ändert sich also in einer Achsenrichtung die Bewegungsgrösse nicht, so behält der Schwerpunkt die gleiche Geschwindigkeit bei.

Ergänzende Bemerkung zu den Schwerpunktsbestimmungen im 1. Theile, S. 132 und 136.

Der Abstand des Schwerpunktes einer Halbkreisfläche von dem Durchmesser wurde im 1. Theile, S. 132 gefunden zu

$$x_0 = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi},$$

Fig. 137.



oder, wenn der Halbmesser b genannt wird,

$$x_0 = \frac{4}{3}\frac{b}{\pi}.$$

Die Halbellipse von dem Durchmesser $2a$ und der Höhe b (Fig. 137) kann man sich in der Weise aus dem Halbkreis entstanden denken, dass jeder zu dem begrenzenden Durchmesser parallele Flächenstreifen in dem Verhältnis $a:b$ verlängert ist. In Folge dieser Verlängerung ändert sich das statische Moment des Flächenstreifens in demselben Verhältnis $a:b$. Da nun das statische Moment = Fläche mal Schwerpunkts-Ordinate, so bleibt letztere unverändert, wenn das statische Moment und der Flächeninhalt sich in gleichem Verhältnis ändern. Man kann daher ohne Rechnung schliessen, dass der Schwerpunkt der Fläche einer Halbellipse von der Höhe b in dem Abstande

$$\frac{4}{3}\frac{b}{\pi} \tag{5}$$

von dem begrenzenden Durchmesser $2a$ liegen muss.

Eine ähnliche Beziehung besteht zwischen dem Schwerpunkt eines Halbkugelkörpers und des Körpers eines Halbellipsoides. Vergrössert man, von einem Halbmesser c ausgehend, sämmtliche Längen in der x-Richtung in dem Verhältnis $a:c$, sämmtliche Längen in der y-Richtung in dem Verhältnis $b:c$, so entsteht ein Halbellipsoid, dessen Grundfläche eine Ellipse der Halbachsen a und b, dessen Höhe $= c$ ist. Jede zur Grundfläche parallele Scheibe hat sich auf das $\frac{ab}{c^2}$fache vergrössert, das statische Moment jeder Scheibe in Bezug auf die Grundfläche also in

demselben Verhältnisse. Sonach muss die Höhe des Schwerpunktes des Körpers des Halbellipsoides von der Höhe c betragen

6) $$\frac{3}{8}\, c\,,$$

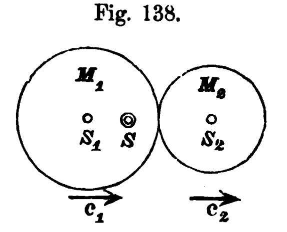
wie es für den Halbkugelkörper vom Halbmesser c im 1. Theile, S. 136 gefunden wurde.

2. Anwendungen des Satzes von der Bewegung des Schwerpunktes und des Satzes vom Antriebe.

a) Gerader, centraler Stofs.

Wenn zwei Körper von den Massen M_1 und M_2 mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 in geradem centralen Stosse zusammentreffen (mit $c_1 > c_2$), so ist, wenn man beide Körper als eine einzige Massengruppe betrachtet, die während der Stossdauer zwischen beiden Massen auftretende Druckkraft N eine innere Kraft. Es wirkt daher auf die Massengruppe, wenn man die Schwere und die Reibung ausser Acht lässt, auf die Massengruppe keine äussere Kraft, daher ist die Geschwindigkeit u des Schwerpunktes S der Gruppe beider Körper gleichbleibend; es gilt nämlich nach Gl. 4, S. 171

Fig. 138.



$$M_1 c_1 + M_2 c_2 = (M_1 + M_2)\, u\,, \quad \text{d. h.}$$

7) $$u = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}.$$

Dies ist zugleich die gemeinschaftliche Geschwindigkeit der Schwerpunkte beider Körper im Augenblicke der stärksten Formänderung (s. 2. Theil, S. 128, Gl. 5). Bewegen sich die Massen nach dem Stosse mit verschiedenen Geschwindigkeiten v_1 und v_2 weiter, so ist, da die gesammte Bewegungsgrösse gleich bleibt,

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2\,, \quad \text{woraus}$$

$$\frac{c_1 - v_1}{v_2 - c_2} = \frac{M_2}{M_1}$$

wird (s. 2. Theil, S. 127, Gl. 4); die Geschwindigkeit des Gesammtschwerpunktes aber bleibt unverändert u (nach Gl. 7), so lange keine äussere Kraft auftritt.

b) Verhalten eines auf dem Wasser schwimmenden Kahnes.

Befindet sich in einem Kahn ein Mensch und haben beide die Geschwindigkeit Null, so hat auch der Gesammtschwerpunkt von Kahn und Mensch die Geschwindigkeit Null und wird, wenn keine äusseren Kräfte in wagerechter Richtung auftreten, auch keine wagerechte Bewegung erfahren. Bewegt sich der Mensch in dem Kahne nach vorn, so wird der Kahn unter ihm zurückgehen, u. zw. wenn man den Bewegungswiderstand des Kahnes vernachlässigt, um genau so viel, dass der Gesammtschwerpunkt an derselben Stelle verbleibt. Die Ursache dieses Verhaltens besteht darin, dass der Mensch beim Vorwärtsschreiten einer Kraft bedurfte, die zwischen seinen Füssen und dem Boden des Kahnes auftrat, den Schreitenden vorwärts, den Kahn aber, nach dem Gesetze der Wechselwirkung, rückwärts trieb.

Hat der Mann den Kahn ans Ufer gerudert und zieht die Ruder ein, um ans Land zu steigen, so wird er, wenn er von der Ruderbank nach dem Vorderende des Kahnes gelangt ist, bemerken, dass dieser das Ufer nun nicht mehr berührt. Ist der Kahn sehr leicht, so wird der Mann nun vielleicht den Uferrand nicht mehr ergreifen können. Befinden sich in der Mitte des Kahnes zwei Menschen, so lässt sich dieses Zurückweichen vom Ufer dadurch vermeiden, dass, während der Eine nach dem Vorderende ging, der Andere nach dem Hinterende schreitet. Dann heben sich die Wirkungen an dem Kahne gegenseitig auf. Der Erstere kann sich am Lande festhalten, und nun darf auch der Gefährte nach vorn schreiten, ohne den Kahn zurückzutreiben, da die Hand des Ersteren jetzt eine Kraft ausübt, die den Gefährten und somit auch den Gesammtschwerpunkt nach dem Ufer hinzieht.

Befinden sich in dem Kahne Steine oder dergl., so kann man durch Fortwerfen derselben nach rückwärts den Kahn vorwärts treiben; denn zum Fortschleudern eines Steines ist eine wagerechte Kraft erforderlich, die sich nach dem Gesetze der Wechselwirkung durch den Körper des Werfenden auf den Kahn überträgt und diesen in entgegengesetztem Sinne forttreibt. Auch durch Abfeuern von Gewehren nach rückwärts wird man einen Kahn vorwärts bewegen können.

c) Der Schwerpunkt als Mittelpunkt einer Massengruppe.

Der den Bedingungen

$$Mx_0 = \Sigma mx, \quad My_0 = \Sigma my, \quad Mz_0 = \Sigma mz$$

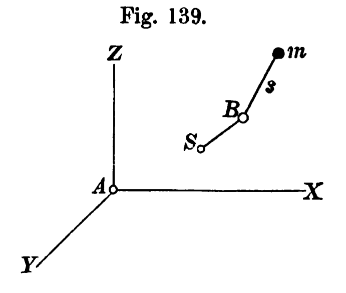
entsprechende Punkt S mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0, welcher im 1. Theile, S. 139 als Massenmittelpunkt bezeichnet wurde, lässt sich noch in anderer Weise als Mittelpunkt einer Massengruppe erklären, insofern er derjenige Punkt ist, welcher von der Gesammtheit der Massengruppe den kleinsten Abstand hat (im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate verstanden). Denn es lässt sich der Satz beweisen:

In einer Massengruppe wird die Summe der Produkte, die durch Multiplikation eines jeden Massenpunktes m mit dem Quadrate des Abstandes von einem bestimmten Punkt entstehen, ein Minimum, wenn dieser bestimmte Punkt der Schwerpunkt der Massengruppe ist.

Hat ein beliebig in der Massengruppe gewählter Festpunkt B (Fig. 139) die Koordinaten x_1, y_1, z_1, der Schwerpunkt S die Koordinaten x_0, y_0, z_0, ein Massenpunkt m die Koordinaten x, y, z, so gilt für den Abstand s des Punktes m von B:

$$s^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Fig. 139.



Bezeichnet man die fragliche Produktensumme in Bezug auf den Punkt B mit W, so ist

$$W = \Sigma m\left\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2\right\};$$

dieselbe wird in Bezug auf den Schwerpunkt S:

$$W_0 = \Sigma m\left\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right\}.$$

Der Unterschied beider Summen beträgt:

$$W - W_0 = \Sigma m\left\{(x - x_1)^2 - (x - x_0)^2 + (y - y_1)^2 - (y - y_0)^2 + (z - z_1)^2 - (z - z_0)^2\right\}.$$

Führt man die Quadrate aus, bedenkt, das x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 konstant, dass $\Sigma mx = Mx_0$ u. s. w. geschrieben werden kann, so ergiebt sich nach einfacher Zusammenziehung

$$W - W_0 = M(x_1^2 - 2x_1x_0 + x_0^2)$$
$$+ M(y_1^2 - 2y_1y_0 + y_0^2)$$
$$+ M(z_1^2 - 2z_1z_0 + z_0^2) \quad \text{oder}$$

$$W - W_0 = M\{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2\}.$$

Nennt man aber e den Abstand der beiden Punkte B und S, so ist

$$e^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2, \quad \text{daher}$$
$$W - W_0 = Me^2.$$

Da dies wegen des Quadrates $\geqq 0$, so ist stets $W \geqq W_0$ und erreicht seinen kleinsten Werth Null für $e = 0$, d. h. wenn B mit S zusammenfällt.

3. Der Satz des Arbeitsvermögens.

Ist c die Anfangs-, v die Endgeschwindigkeit eines Massenpunktes m einer Massengruppe, so ist nach 1. Theil, S. 143

$$1) \qquad \Sigma \tfrac{1}{2} mv^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} mc^2 = \Sigma \mathfrak{A}_k + \Sigma \mathfrak{A}_i,$$

wenn $\Sigma \mathfrak{A}_k$ und $\Sigma \mathfrak{A}_i$ die Arbeitssumme der äusseren bezw. inneren Kräfte der Gruppe bedeuten, oder:

Die Zunahme des Arbeitsvermögens einer Massengruppe ist gleich der Arbeitssumme der äusseren und der inneren Kräfte.

Befinden sich unter den äusseren oder inneren Kräften sog. Bedingungskräfte (s. S. 153), deren Wirkung sich durch gewisse geometrische Bedingungsgleichungen für die Bewegung der Massengruppe ausdrücken lässt, so verrichten diese bei jeder virtuellen Verrückung, mithin auch bei der wirklichen Bewegung nach S. 154 eine Arbeit gleich Null, können also bei der Aufstellung der Arbeitssumme unberücksichtigt bleiben. Dahin gehören nach S. 155 und 1. Theil, S. 144 die inneren Kräfte starrer Körper, ebenso auch nach 2. Theil, S. 231 die inneren Kräfte tropfbar flüssiger Körper, für welche die Bedingung unveränderlichen Rauminhalts besteht und bei der Bewegung durch ein Gefäss noch die Bedingung, dass

Querschnitt mal Geschwindigkeit für alle Theile des Gefässes in irgend einem Zeitpunkte den gleichen Werth haben. Dahin gehören auch nach S. 156 die inneren Kräfte eines Maschinengetriebes. Dieser Satz, dass die Arbeit der Bedingungskräfte Null sei, gilt aber nur, solange diese Kräfte endliche Grösse haben. In solchen Fällen jedoch, wo zur Aufrechterhaltung der Bedingungen unendlich grosse Kräfte erforderlich werden, erscheint ihre Arbeit in der Form $\infty \cdot 0$ und muss durch besondere Verfahren näher bestimmt werden. Mit derartigen Fällen hat man es stets zu thun, wenn die Bedingungen der in Bewegung befindlichen Massengruppe plötzliche Geschwindigkeits-Änderungen erfordern. Diese sind nur durch unendlich grosse Kräfte zu bewirken, und da es unendlich grosse Kräfte an einer endlichen Massengruppe in Wirklichkeit nicht giebt, so werden die entsprechenden Bedingungen thatsächlich nicht in aller Schärfe, sondern nur annäherungsweise gültig bleiben.

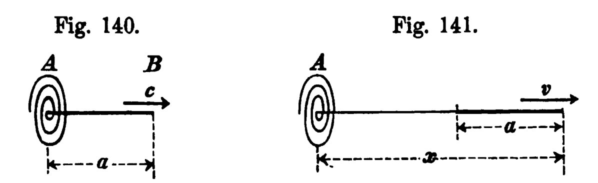
Diese Betrachtung findet auf alle Fälle Anwendung, wo als starr angenommene Körper mit verschiedenen Geschwindigkeiten zusammenstossen. Würden die Körper beim Stosse völlig starr bleiben, so müssten zwischen ihnen und in ihrem Inneren unendlich grosse Kräfte auftreten; in Wirklichkeit aber werden zusammenstossende feste Körper gewisse Formänderungen erfahren, und die inneren Kräfte werden beim Stosse Arbeiten leisten, die (s. 2. Theil, S. 129 u. ff.) sich nach dem Verhalten der Körper während des Stosses richten und in den meisten Fällen negativ gefunden werden. Ähnlich verhält es sich bei der Bewegung des Wassers durch Gefässe mit plötzlichen Querschnittsänderungen (s. 2. Theil, S. 245). Auch in solchen Fällen werden die bei der Ableitung der der Grundgleichung I (2. Theil, S. 231) angenommenen Bedingungen nicht mehr scharf zutreffen, es wird daher auch die Arbeit der inneren Kräfte nicht mehr Null sein, sondern einen negativen Werth haben. Diese negativen Arbeiten, die sich durch einen Verlust an äusserem Arbeitsvermögen zu erkennen geben, verwandeln sich (nach 2. Theil, S. 334) in Wärme.

Der Satz der Arbeit gilt daher nur unter Berücksichtigung der durch etwaige Stösse veranlassten Arbeitsverluste.

Beispiel 1: Bewegung einer Kette. Ist eine Kette bei A (Fig. 140) derartig aufgewickelt oder niedergelegt, dass beim Abziehen des freien Endes B

kein Klemmen und keine Reibung entsteht, und wird dem bereits gerade gestreckten vorderen Theile von der Länge a eine wagerechte Geschwindigkeit c ertheilt, so wird, wenn äussere Kräfte nicht wirken, die Kette sich weiter abwickeln und an der Bewegung theilnehmen. Es soll berechnet werden, welche Geschwindigkeit v der gerade gestreckte Theil der Kette in einem Zeitpunkte hat, wo eine Länge x abgewickelt ist (Fig. 141). Hierbei muss nach dem

Fig. 140. Fig. 141.



Satze vom Antriebe (S. 171) wegen des Fehlens äusserer Kräfte die Bewegungsgrösse stets den gleichen Werth behalten. Ist die Masse der Kette gleichmässig über deren Länge vertheilt, so kann man die Masse der Längeneinheit $= 1$ setzen. Zu Anfang war (Fig. 140) die gesammte Bewegungsgrösse $a \cdot c$; nachdem x Längeneinheiten die Geschwindigkeit v erhalten haben (Fig. 141), beträgt sie $x \cdot v$; daher wird

2) $$x \cdot v = a \cdot c, \quad \text{oder} \quad v = c \cdot \frac{a}{x}.$$

Setzt man nun $v = dx : dt$, so erhält man

$$x \cdot dx = a \cdot c \cdot dt$$

und daraus, weil $x = a$ für $t = 0$ werden muss,

3) $$x^2 = a^2 + 2\,act \quad \text{oder} \quad x = \sqrt{a(a + 2\,ct)}.$$

Dies ist die Bewegungsgleichung, welche in Verbindung mit Gl. 2 die Geschwindigkeitsgleichung

4) $$v = \frac{c}{\sqrt{1 + 2\frac{c}{a}t}}$$

liefert. Nach Gl. 2 und 4 wird erst $v = 0$ für $x = \infty$ und für $t = \infty$. Das Abwickeln der Kette würde also bei Abwesenheit aller Widerstände niemals aufhören, wie gross auch die Länge der bei A (Fig 140) aufgeschichteten Kette sein mag. Diese Betrachtung gilt auch für den Fall, dass die ursprünglich mit der Geschwindigkeit c in Bewegung gesetzte Kette von der Länge a mit einer steifen Stange, etwa einer Harpune vertauscht wird, welche gleiche Masse mit einer Ketten- oder Seillänge a hat und in Folge der ihr ertheilten Bewegungsgrösse $a \cdot c$ Kette oder Seil nach sich zieht. Auch auf einen s. g. Raketen-Apparat zur Rettung Schiffbrüchiger findet Gl. 4 Anwendung.

Man kann diese Aufgabe auch mittels des Satzes der Arbeit lösen. Würde man, da äussere Kräfte nicht wirken, unter der Annahme, dass die

inneren Kräfte der undehnbar gedachten Kette keine Arbeit verrichten, die Änderung des Arbeitsvermögens = Null setzen, so müsste

$$^1/_2\, x v^2 = {}^1/_2\, a c^2, \quad \text{mithin}$$

$$v = c\sqrt{\frac{a}{x}}$$

sein, was mit Gl. 2 in Widerspruch steht und unrichtig ist, weil in jedem Zeittheilchen dt ein Kettenstück dx stossweisse aus der Geschwindigkeit Null in die Geschwindigkeit v des Kettenstückes x übergeführt wird. Hierbei erfolgt während der Zeit dt ein Verlust an Arbeitsvermögen, der (nach 2. Theil, S. 130, Gl. 11 bezw. 12) mit $M = x$; $M_1 = dx$; $c = v$; $c_1 = 0$; $k = 0$ sich zu

5) $$\frac{x \cdot dx}{x + dx}\,\frac{v^2}{2} = dx \cdot \frac{v^2}{2}$$

bestimmt. Das Arbeitsvermögen der Kette, $^1/_2\, x v^2$ erfährt während der Zeit dt eine Zunahme $^1/_2\, d(x v^2)$ und diese ist offenbar $= -\, dx \cdot \frac{v^2}{2}$ (Gl. 5) zu setzen. Da x und v beide mit t veränderlich sind, so wird aus

$$d(x v^2) = -\, dx \cdot v^2:$$

$$x \cdot 2\, v dv + v^2 \cdot dx = -\, v^2 dx$$

$$2\, v dv \cdot x = -\, 2\, v^2 \cdot dx \quad \text{oder}$$

$$\frac{dx}{x} = -\,\frac{dv}{v}, \quad \text{also}$$

$$\mathrm{l}\, x = \mathrm{l}\left(\frac{1}{v}\right) + C,$$

und, weil für $x = a$ sein muss $v = c$:

$$\mathrm{l}\, a = \left(\frac{1}{c}\right) + C, \quad \text{also}$$

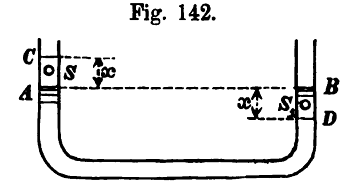
$$\mathrm{l}\left(\frac{x}{a}\right) = \mathrm{l}\left(\frac{c}{v}\right) \quad \text{und}$$

$$x = a \cdot \frac{c}{v},$$

was mit Gl. 2 übereinstimmt.

Beispiel 2: Schwingung des Wassers in einer gekrümmten Röhre. Das in einer nach Fig. 142 geformten Röhre befindliche Wasser bilde im Gleichgewichtszustande den Wasserspiegel AB. Der Querschnitt der Röhre sei F; sie sei auf eine Länge b mit Wasser gefüllt, so dass die Wassermenge das Gewicht $Mg = \gamma \cdot F \cdot b$ habe. Durch irgend eine Ursache werde der Ruhezustand des Wassers derartig gestört, dass das Wasser in der ruhenden Röhre mit der Geschwindigkeit c durch die Gleichgewichtslage hindurchgeht. In dem Augenblicke, wo sich die

Fig. 142.



linksseitige Oberfläche bei C, die rechtsseitige bei D befindet, d. h. um x über bezw. unter der Gleichgewichtslage, sei die Geschwindigkeit der ganzen Wassermasse v; dann ist die Änderung des Arbeitsvermögens der Wassermasse von der Gleichgewichtslage ($x = 0$) bis zu der beliebigen Lage ($x = x$):

$$\frac{\gamma}{g} F \cdot b \cdot \frac{v^2 - c^2}{2}.$$

Arbeit wird bei dieser Bewegung, wenn man die Reibung vernachlässigt, nur von der Schwerkraft verrichtet, denn die Druckkräfte der Röhre gegen das Gefäss stehen überall rechtwinklig zur Bewegung des Wassers längs der Wandungen, und die inneren Kräfte des Wassers verrichten in diesem Falle keine Arbeit, weil plötzliche Querschnittsänderungen nicht vorhanden sind und die Krümmungen mit genügend grossem Halbmesser angenommen werden (s. 2. Theil, S. 283). Die Arbeit der Schwere kann man am einfachsten berechnen, indem man sich das zwischen B und D ursprünglich vorhandene Wassergewicht $\gamma \cdot F \cdot x$ nach AC verrückt denkt, wobei der Schwerpunkt von S_1 nach S, d. h. um x gehoben wird. Dann ist die Arbeit $-\gamma \cdot F \cdot x^2$. Aus

$$\frac{\gamma}{g} F \cdot b \frac{v^2 - c^2}{2} = -\gamma \cdot F \cdot x^2$$

ergiebt sich dann
$$v = \sqrt{c^2 - \frac{2g}{b} x^2}.$$

Setzt man zugleich
$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \text{so wird}$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{c^2 - \frac{2g}{b} x^2}}.$$

Wandelt man die rechte Seite um in

$$\sqrt{\frac{b}{2g}} \frac{d\left(\frac{x}{c}\sqrt{\frac{2g}{b}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{2g}{b}\frac{x^2}{c^2}}},$$

so ergiebt die Integration

$$t = \sqrt{\frac{b}{2g}} \cdot \arcsin \frac{x}{c}\sqrt{\frac{2g}{b}},$$

wobei die Konstante verschwindet, weil für $t = 0$ auch $x = 0$ sein muss.

Diese Gleichung für die Bewegung der beiden Wasserspiegel und somit auch für die ganze Wassermasse entspricht der Gl. 4, S. 54 für die geradlinige Schwingungsbewegung

$$t = \frac{1}{k} \arcsin \frac{k}{c} \cdot x,$$

wenn man $k = \sqrt{\frac{2g}{b}}$ setzt. Daher ist die Bewegung eine Schwingung um die Gleichgewichtslage als Mitte; die halbe Schwingungsweite, d. h. die grösste

Hebung und Senkung der beiden Wasserspiegel von der Gleichgewichtslage aus, beträgt (nach Gl. 8, S. 55)

$$a = \frac{c}{k} = c\sqrt{\frac{b}{2\,g}},$$

die Dauer einer einfachen Schwingung (nach Gl. 7, S. 55)

$$t_1 = \frac{\pi}{k} = \pi\sqrt{\frac{b}{2\,g}},$$

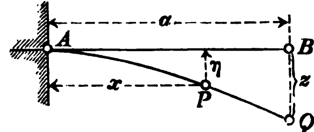
entsprechend einer Pendellänge $^1/_2\, b$.

Beispiel 3: Querschwingungen eines elastischen, eingespannten Stabes. Der Fall, wo ein eingespannter Stab am freien Ende eine Masse trägt, gegen welche die eigene Masse des Stabes vernachlässigt werden kann, und mit dieser Masse Querschwingungen ausführt, wurde auf S. 61 behandelt.

An dieser Stelle möge nun der Fall betrachtet werden, wo der prismatisch gedachte Stab nur mit seiner e i g e n e n Masse schwingt.

In einem Zeitpunkte t habe die Mittellinie des Stabes die Form APQ (Fig. 143); der Punkt P weiche um η, der Endpunkt Q um z von der Form im spannungslosen Zustand AB ab; unter Vernachlässigung einer etwaigen Durchbiegung in Folge des eigenen Gewichtes ist AB auch die Gleichgewichtsform des Stabes.

Fig. 143.



Die Biegungslinie APQ ist zunächst unbekannt. Der beliebige Punkt P derselben hat eine aufwärts gerichtete Beschleunigung r; bringt man an jedem Massentheilchen $m = \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot dx$ die abwärts gerichtete Ergänzungskraft $\frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot dx \cdot r$ an, so halten diese Kräfte den wirklich vorhandenen Kräften das Gleichgewicht; mithin ist APQ die **B i e g u n g s l i n i e f ü r e i n e r u h e n d e s t e t i g e B e l a s t u n g**, welche an der beliebigen Stelle P für die Längeneinheit die Grösse

$$p = \frac{\gamma}{g} F \cdot r \quad \text{hat.} \tag{1}$$

Befindet sich die Schwingung des Stabes im Beharrungszustande, so erfolgt die Bewegung der Punkte P und Q nach ähnlichen Gesetzen, und da nun beide Punkte in der gleichen Zeit die verschiedenen Wegeslängen η und z durchlaufen, so müssen sowohl die Geschwindigkeiten wie auch die Beschleunigungen der Punkte P und Q den Wegen η und z proportional sein. Für die Geschwindigkeiten u und v, die Beschleunigungen r und q beider Punkte gilt daher

$$u = \frac{v}{z}\,\eta; \quad r = \frac{q}{z}\,\eta. \tag{2}$$

Hiernach ist die Ergänzungsbelastung bei P

$$p = \frac{\gamma}{g} F \frac{q}{s} \eta .$$

Nach S. 53, Gl. 3 von Keck's Elasticitätslehre wird, wenn man die für den vorliegenden Fall gültigen Vorzeichen beachtet,

$$3)\qquad EJ \frac{d^4 \eta}{dx^4} = p = \frac{\gamma}{g} F \frac{q}{s} \eta .$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung giebt die Gleichung der Biegungslinie APQ. Weil dieselbe aber transcendent und ziemlich verwickelter Form ist, so möge eine thunlichst einfache Annäherungslösung versucht werden. Da nämlich die dem wirklichen Verhalten entsprechende Belastung nach Mafsgabe der Fläche ABQ von der Einspannungsstelle nach dem freien Ende hin stark zunimmt, so wird von den einfachsten Belastungsfällen, deren Biegungslinien noch in bequemer Weise zu behandeln sind, wohl derjenige mit einer Einzellast am freien Ende den vorliegenden Bedingungen einigermafsen nahekommen, d. h. eine Biegungslinie ergeben, die von der Biegungslinie des schwingenden Stabes in den allgemeinen Verhältnissen nicht zu sehr abweicht. Unter diesen Annahmen möge der Satz vom Arbeitsvermögen auf den Stab angewendet werden.

Sind die Punkte P und Q mit den Geschwindigkeiten u_0 und c durch die Gleichgewichtslage AB gegangen, so ist die Zunahme des Arbeitsvermögens des Stabes beim Übergange aus der Gleichgewichtslage in die beliebige Lage APQ gleich der Biegungsarbeit desselben, d. h.

$$4)\qquad \frac{\gamma}{g} F \int_0^a \frac{u^2 - u_0^2}{2} dx = \mathfrak{A} .$$

Einer Einzellast K entspricht aber (2. Theil, S. 110 u. 111) eine Durchbiegung

$$s = \frac{K \cdot a^3}{3\,EJ}$$

und eine innere Arbeit

$$5)\qquad \mathfrak{A} = -\frac{K}{2} s = -\frac{3}{2}\,\frac{E \cdot J \cdot s^2}{a^3}, \quad \text{weil} \quad K = \frac{3\,E \cdot J \cdot s}{a^3} .$$

Wegen Gl. 2 und 5 wird aber aus Gl. 4:

$$\frac{\gamma}{g} F \frac{v^2 - c^2}{2\,s^2} \int_0^a \eta^2 dx = -\frac{3}{2}\,\frac{E \cdot J \cdot s^2}{a^3} .$$

Nach 2. Theil, S. 42 ist die Gleichung der Biegungslinie für eine Last K:

$$\eta = \frac{K}{EJ}\left(\frac{a x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) = \frac{3\,s}{2\,a^3}\left(a x^2 - \frac{x^3}{3}\right), \quad \text{somit}$$

$$6)\qquad \int_0^a \eta^2 dx = \frac{9}{4}\,\frac{s^2}{a^6} \int_0^a \left(a^2 x^4 - \frac{2}{3} a \cdot x^5 + \frac{x^6}{9}\right) dx = 0{,}236\, s^2 a .$$

Hieraus folgt

$$7)\qquad \frac{\gamma}{g}\,F\,\frac{c^2-v^2}{2\,s^2}\cdot 0{,}236\,s^2 a = \frac{3}{2}\,\frac{E\cdot J\cdot s^2}{a^3} \quad \text{und}$$

$$v^2 = c^2 - 12{,}71\,\frac{E\cdot J\cdot g}{a^4\gamma\cdot F}\,s^2.$$

Dies entspricht nach S. 54 mit

$$8)\qquad k^2 = 12{,}71\,\frac{E\cdot J\cdot g}{a^4\gamma\cdot F}$$

der Geschwindigkeitsgleichung einer geradlinigen Schwingung des Stabendes Q. Mithin ist die Schwingungslänge nach S. 58

$$9)\qquad l = \frac{g}{k^2} = \frac{a^4\gamma\cdot F}{12{,}71\,E\cdot J} = 0{,}63\,f, \quad \text{wenn}$$

$$f = \frac{\gamma\cdot F\cdot a^4}{8\,E\cdot J}$$

die Durchbiegung unter dem eigenen Gewichte des Stabes bedeutet. Die Dauer einer einfachen Schwingung ist nach S. 58

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\cdot a^2\sqrt{\frac{\gamma\cdot F}{12{,}71\,E\cdot J\cdot g}} = a^2\sqrt{\frac{0{,}777\,\gamma\cdot F}{E\cdot J\cdot g}},$$

oder mit $J = F\cdot i^2$:

$$10)\qquad t_1 = \frac{a^2}{i}\sqrt{\frac{0{,}777\,\gamma}{E\cdot g}}.$$

Für einen eingespannten Stahlstab rechteckigen Querschnittes von $a = 0{,}1$ m freier Länge und $h = 0{,}001$ m Dicke sei $\gamma = 7800$, $E = 2\cdot 10^{10}$ kg/qm, dann wird wegen $i^2 = {}^1/_{12}\,h^2$ und $i = 0{,}289\,h$

$$t_1 = \frac{0{,}01}{0{,}289\cdot 0{,}001}\sqrt{\frac{0{,}777\cdot 7800}{2\cdot 10^{10}\cdot 9{,}81}} = 0{,}0061 \text{ Sekunden},$$

entsprechend 164 einfachen Schwingungen in der Sekunde.

4. Zerlegung des Arbeitsvermögens einer beliebigen Massengruppe.

Hat ein Massenpunkt m (Fig. 144) in Bezug auf ein festes Achsenkreuz AX, AY, AZ, die Koordinaten x, y, z und der Schwerpunkt S der ganzen Massengruppe die Koordinaten x_0, y_0, z_0, so denke man sich durch S ein Achsenkreuz SX', SY', SZ' gelegt, welches zu dem festen Achsenkreuze stets parallel bleibt, sich also mit dem Schwerpunkt S verschiebt.

Fig. 144.

Der Punkt m habe in Bezug auf das bewegliche Achsenkreuz die

Koordinaten x', y', z'. Wenn nun m von der Ebene $Y'SZ'$ um x', die Ebene $Y'SZ'$ von der Ebene YAZ um x_0 entfernt ist, so muss der Punkt m von der Ebene YAZ um $x = x_0 + x'$ entfernt sein. Daher hat man die Gleichungen:

$$x = x_0 + x'; \quad y = y_0 + y'; \quad z = z_0 + z'.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{dx'}{dt}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + \frac{dy'}{dt}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz_0}{dt} + \frac{dz'}{dt}.$$

Für die Geschwindigkeit v des Punktes m gilt aber bekanntlich

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2; \text{ daher wird}$$

$$1) \quad \Sigma\frac{mv^2}{2} = \Sigma\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dx_0}{dt} + \frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt} + \frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dt} + \frac{dz'}{dt}\right)^2\right\}.$$

Führt man die Quadrate der rechten Seite aus, so bekommt man einmal die Glieder

$$\Sigma\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dt}\right)^2\right\},$$

u. zw. ist diese Summe $= \frac{M \cdot u^2}{2}$, wenn u die Geschwindigkeit des Schwerpunktes S und M die ganze Masse der Gruppe bedeutet. Ferner entstehen die Glieder

$$2) \quad \Sigma\frac{m}{2}\left\{2\,\frac{dx_0}{dt}\cdot\frac{dx'}{dt} + 2\,\frac{dy_0}{dt}\cdot\frac{dy'}{dt} + 2\,\frac{dz_0}{dt}\cdot\frac{dz'}{dt}\right\}.$$

Nun ist aber in Bezug auf die Schwerpunktsebene $Y'SZ'$ der Werth $\Sigma m x' = 0$, mithin auch $\Sigma m\frac{dx'}{dt} = 0$. Da ferner in dem Gliede 2 die Grösse $\frac{dx_0}{dt}$ eine Konstante bedeutet, so wird

$$\Sigma\frac{m}{2}\left(2\,\frac{dx_0}{dt}\cdot\frac{dx'}{dt}\right) = \frac{dx_0}{dt}\,\Sigma m\frac{dx'}{dt}, \quad \text{mithin} = 0,$$

und weil für die anderen Achsenrichtungen das Gleiche gilt, so wird die ganze Summe 2 zu Null. — Schliesslich erhält man in Gl. 1 noch als letzte Glieder:

$$\Sigma\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right\}.$$

Nennt man aber w die relative Geschwindigkeit des Punktes m in Bezug auf den Schwerpunkt S der Massengruppe, so sind

$$\frac{dx'}{dt},\quad \frac{dy'}{dt},\quad \frac{dz'}{dt}$$

die Seitengeschwindigkeiten von w, also

$$\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2 = w^2,$$

so dass die letzte Summe einfach $\Sigma \frac{m}{2} w^2$ geschrieben werden kann. Hiernach wird

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} = \frac{M}{2} u^2 + \Sigma \frac{m w^2}{2}, \tag{3}$$

d. h. es kann das Arbeitsvermögen einer Massengruppe in zwei Theile zerlegt werden: der eine Theil ist das Arbeitsvermögen des Schwerpunktes, wenn man sich in demselben die ganze Masse der Gruppe vereinigt denkt; der andere Theil ist das Arbeitsvermögen, welches der relativen Bewegung der einzelnen Punkte gegen den Schwerpunkt entspricht. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des im 1. Theile, S. 295/6 für starre Körper bewiesenen; bei starren Körpern kann die relative Bewegung gegen den Schwerpunkt nur in einer Drehung um denselben bestehen, und diese kann nach S. 23 für jeden Zeitpunkt als Drehung um eine durch den Schwerpunkt gelegte augenblickliche Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω aufgefasst werden, so dass $\Sigma \frac{mw^2}{2}$ für starre Körper gleichbedeutend ist mit $\frac{1}{2} J\omega^2$ (s. 1. Theil, S. 267).

Innere Kräfte haben nach S. 170 auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluss, können daher nur das Arbeitsvermögen $\Sigma \frac{mw^2}{2}$ der relativen Bewegung gegen den Schwerpunkt ändern. Äussere Kräfte können sowohl die Bewegung des Schwerpunktes wie auch die relative Bewegung gegen den Schwerpunkt beeinflussen.

5. Potential einer Massengruppe.

Das Potential der Anziehungskraft $K = k\frac{m_1 m}{r^2}$ eines festen Centralpunktes m_1 (Fig. 145) in Bezug auf einen Massenpunkt m, welcher von m_1 den Abstand r hat ist nach S. 107,

Fig. 145.

1) $$V = -k\frac{m_1 m}{r},$$

wenn k der Festwerth der Massenanziehung, d. h. die Anziehungskraft zwischen zwei Masseneinheiten im Abstande $= 1$ von einander (s. 1. Theil, S. 55) bedeutet, u. zw. ist das Potential diejenige Arbeit, welche von der Anziehungskraft geleistet wird, wenn der Massenpunkt aus dem Abstand r sich in unendliche Entfernung begiebt. Wird nun der Massenpunkt m von einer Gruppe von Massenpunkten, etwa von einem festen Körper mit der Gesammtmasse M, angezogen (Fig. 146), so ist die gesammte Anziehungskraft K, welche der Massenpunkt m von der Massengruppe M erfährt, die Mittelkraft der Anziehungskräfte dK, welche die einzelnen Theilchen dM auf m ausüben, wobei

$$dK = k \cdot \frac{dM \cdot m}{r^2}.$$

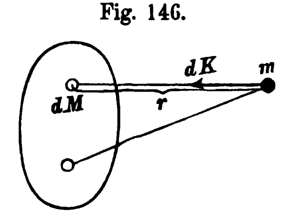


Fig. 146.

Bewegt sich der Massenpunkt auf irgend einem Wege von dem Körper fort bis in unendliche Entfernung, so verrichtet die Anziehungskraft eines Massentheilchens die Arbeit

$$dV = -k \cdot \frac{dM \cdot m}{r}.$$

Da nun bei der Bewegung eines Massenpunktes die Arbeit der Mittelkraft gleich der Arbeitssumme der Einzelkräfte ist (s. 1. Theil, S. 43), so verrichtet die gesammte Anziehungskraft K bei der Bewegung des Massenpunktes ins Unendliche die Arbeit

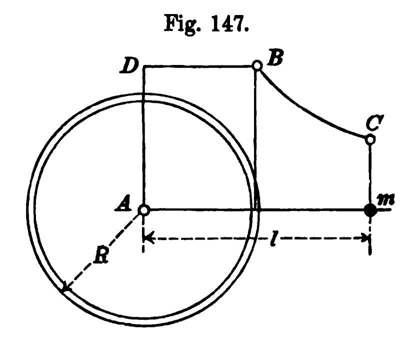
2) $$V = -k \cdot m \int \frac{dM}{r},$$

und diese Arbeit heisst das **Potential** der Massengruppe oder des Körpers M in Bezug auf den Punkt m.

a) Potential einer dünnen, gleichartigen Kugelschale vom Halbmesser R und der Masse M.

Befindet sich (Fig. 147) der Massenpunkt m im Abstand l vom Mittelpunkt A der Kugelschale, u. zw. ausserhalb derselben (mit $l \geqq R$), so ist (nach 1. Theil, S. 56) die gesammte Anziehungskraft K dieselbe, als ob die Masse M der Kugelschale in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Gleiches muss dann auch von der Arbeit der Kraft K, also auch vom Potential derselben gelten. Da aber das Potential der Anziehungskraft eines im Punkt A befindlichen Massenpunktes M in Bezug auf den Punkt m nach S. 186

Fig. 147.



$$-k\frac{Mm}{l},$$

so muss auch das Potential der Kugelschale in Bezug auf den ausserhalb gelegenen Punkt m sein:

$$V = -k\frac{Mm}{l}. \tag{3}$$

Bei veränderlichem l ist die Darstellung des davon abhängigen V offenbar eine gleichseitige Hyperbel BC.

Befindet sich der Massenpunkt innerhalb der Kugelschale, ist also $l \leqq R$, so ist die Anziehungskraft der Kugelschale gegen den Punkt gleich Null (s. 1. Theil, S. 56/57). Bei der Bewegung des Punktes m in unendliche Ferne beginnt somit die Arbeitsverrichtung erst, sobald er die Kugelschale durchdringt. Daher ist das Potential für $l < R$ dasselbe wie für $l = R$. Setzt man also in Gl. 3 für l den Werth R ein, so wird

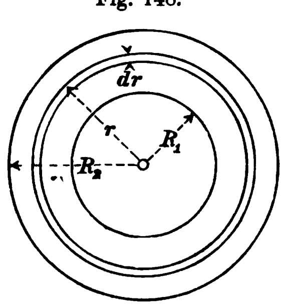
$$V = -\frac{kMm}{R}. \tag{4}$$

Das Potential der Kugelschale in Bezug auf einen irgendwo im Inneren derselben befindlichen Massenpunkt m ist somit konstant, dargestellt durch die Gerade BD (Fig. 147)

b) Potential einer gleichartigen Hohlkugel von endlicher Wandstärke.

Der innere Halbmesser sei R_1, der äussere R_2, die Masse sei M (Fig. 148). Man zerlege dieselbe in lauter koncentrische Schalen von unendlich geringer Wandstärke. Hat eine solche Schale einen Halbmesser r und eine Wandstärke dr, so ist ihre Masse

Fig. 148.



$$5) \qquad = \frac{\gamma}{g} \cdot 4 r^2 \cdot \pi \cdot dr.$$

Da nun das Potential eines endlichen Körpers nach Gl. 2 in Form eines Integrals, d. h. einer Summe der Beiträge einzelner Massentheilchen erscheint und da diese Summationen für dünne Kugelschalen durch die Gl. 3 und 4 bereits ermittelt sind, so können nun die Beiträge, welche die einzelnen, die Hohlkugel bildenden Schalen zu den Potentialwerthen der Hohlkugel liefern, wiederum summirt werden, wobei nur stets diejenigen Kugelschalen, welche den Massenpunkt umschliessen, nach Gl. 4 zu behandeln sind, während für diejenigen Schalen, ausserhalb deren der Punkt sich befindet, Gl. 3 anzuwenden ist.

Für einen ausserhalb der Hohlkugel gelegenen Punkt m, d. h. für $l \geqq R_2$, gilt für alle dünnen Schalen übereinstimmend Gl. 3, daher wird

$$6) \qquad V_a = -\frac{km}{l}\int dM = -k\frac{mM}{l}.$$

(In V_a soll der Index a auf die Lage des Punktes l „ausserhalb“ hinweisen).

Für einen innerhalb des Hohlraumes der Hohlkugel befindlichen Punkt m, d. h. für $l \leqq R_1$, gilt für alle dünnen Schalen übereinstimmend Gl. 4, doch muss in derselben, da R für die einzelnen Schalen verschieden ist, das dortige

$$\frac{M}{R} \quad \text{mit} \quad \frac{\gamma}{g}\,\frac{4 r^2 \pi \cdot dr}{r} = \frac{\gamma}{g} 4 r \pi \cdot dr$$

vertauscht werden.

Man erhält dann für die ganze Hohlkugel

$$7) \quad V_h = -k\cdot m\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot 4\pi\int_{R_1}^{R_2} r\,dr = -km\frac{\gamma}{g}\cdot 2\pi(R_2^2 - R_1^2).$$

(In V_h soll der Index h auf die Lage des Punktes im „Hohlraume" hinweisen.)

Für einen in der Wandung befindlichen Punkt m, d. h. für $R_2 > l > R_1$, ist für die dünnen Schalen, deren Halbmesser $r \leq l$, die Gl. 3, für die übrigen die Gl. 4 anzuwenden. Erstere liefern zum Potential der Hohlkugel, wenn man M mit $4\frac{\gamma}{g}\cdot r^2\pi\cdot dr$ vertauscht, den Beitrag

$$-\frac{km}{l}\,4\frac{\gamma}{g}\pi\int_{R_1}^{l} r^2 dr = -km\frac{4}{3}\,\frac{\gamma}{g}\pi\left(l^2 - \frac{R_1^3}{l}\right).$$

Die anderen liefern den Beitrag

$$-km\,4\frac{\gamma}{g}\pi\int_{l}^{R_2} r\,dr = -km\,2\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot\pi(R_2^2 - l^2).$$

Man erhält dann nach einfacher Zusammenziehung

$$8) \quad V_w = -km\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot 2\pi\left(R_2^2 - \frac{l^2}{3} - \frac{2}{3}\,\frac{R_1^3}{l}\right).$$

(In V_w soll der Index w auf die Lage des Punktes in der „Wandung" hinweisen.)

c) Potential einer gleichartigen Vollkugel vom Halbmesser R.

Man hat in den vorstehenden Gl. 6, 7, 8 nur $R_1 = 0$ und $R_2 = R$ zu setzen. Für einen ausserhalb der Kugel gelegenen Punkt, d. h. für $l \geqq R$ wird einfach

$$9) \quad V_a = -k\frac{mM}{l};$$

für einen im Inneren befindlichen Punkt (aus Gl. 8):

$$10) \quad V_w = -k\cdot m\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot 2\pi\left(R^2 - \frac{l^2}{3}\right),$$

was mit $M = \frac{4}{3}\,\frac{\gamma}{g}R^3\pi$ auch geschrieben werden kann

$$11) \quad V_w = -\frac{k\cdot m\cdot M}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{l^2}{2R^2}\right).$$

Für einen Punkt m im Mittelpunkte der Kugel giebt $l = 0$ in Gl. 11

$$V_w = -\frac{kmM}{R} \cdot \frac{3}{2}$$

$= AD$ in Fig. 149.

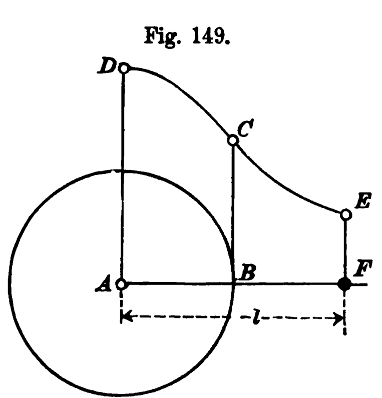


Fig. 149.

Für einen Punkt m an der Oberfläche der Kugel giebt $l = R$ in Gl. 9 u. 11 übereinstimmend

$$12) \quad V_w = -\frac{kmM}{R} = BC$$

in Fig. 148.

Trägt man V_a und V_w als Ordinaten auf, so erhält man die gleichseitige Hyperbel CE der Gl. 9, welcher sich im Punkte C die Parabel DC der Gl. 11 mit der Achse DA tangential anschliesst.

d) Selbstpotential einer gleichartigen Vollkugel.

Werden die einzelnen Massentheilchen der Oberfläche der Vollkugel von der Masse M und dem Halbmesser R in Gestalt dünner Schalen von der Kugel abgelöst und in unendliche Entfernung gebracht, so dass der Halbmesser der Vollkugel sich allmählich verkleinert, bis er zu Null geworden ist, so nennt man die bei dieser Zertheilung oder Zerstäubung der Kugel ins Unendliche von den Anziehungskräften verrichtete Arbeit das **Selbstpotential** der Kugel. Ist die Kugel bereits bis auf einen Halbmesser x verkleinert (Fig. 150), so beträgt für jedes Massentheilchen ihrer Oberfläche das Potential nach Gl. 12, wenn man darin R mit x und M mit $\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{4}{3} x^3 \pi$ vertauscht:

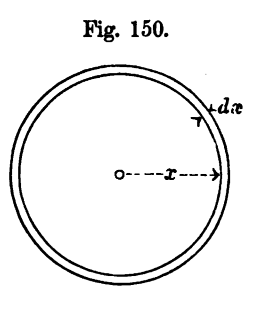


Fig. 150.

$$-km \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{4}{3} \pi x^2,$$

für die ganze augenblickliche Aussenschale von der Dicke dx also, wenn man deren Masse $\frac{\gamma}{g} \cdot 4x^2\pi \cdot dx$ für m einführt:

$$dV = -k\left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \frac{16}{3}\pi^2 x^4 dx.$$

Integrirt man dies von $x = 0$ bis $x = R$, so ergiebt sich das Selbstpotential zu

$$V = -k \cdot \left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \frac{16}{15}\pi^2 R^5,$$

oder kürzer, weil $M^2 = \left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \frac{16}{9} R^6 \pi^2$ ist,

$$V = -\frac{3}{5} k \frac{M^2}{R}. \tag{13}$$

Die gleiche Arbeit in positivem Sinne wird geleistet, wenn eine unendlich vertheilte Masse M unter Einwirkung der gegenseitigen Massenanziehung sich zu einer Kugel vom Halbmesser R verdichtet. Diese bei dem Ballungsvorgange geleistete Arbeit setzt sich in dem Verhältnisse

$$424^{\text{mkg}} \equiv 1 \text{ Wärmeeinheit}$$

(s. 2. Theil, S. 334) in Wärmemenge um und ertheilt der Kugel eine entsprechend hohe Temperatur.

6. Satz von der Momentensumme der Bewegungsgrössen einer Massengruppe.

Der Punkt m einer Massengruppe habe im Zeitpunkte t eine Geschwindigkeit v; es wirke auf ihn eine Gesammtkraft K. Diese ertheilt dem Punkt eine Beschleunigung $p = K : m$, und wenn man noch $p = du : dt$ setzt, so ist du die sog. Elementarbeschleunigung (s. 1. Theil, S. 24). Als Mittelgeschwindigkeit aus v und du erhält man dann nach Grösse, Richtung und Sinn die Geschwindigkeit $v + dv$ nach Verlauf eines Zeittheilchens dt. Nun gilt nach 1. Theil, S. 101 auch für die Geschwindigkeiten eines Punktes der Satz der statischen Momente, so dass in Bezug auf eine beliebige Achse O das Moment der Mittelgeschwindigkeit gleich der Momentensumme der Seitengeschwindigkeiten ist. Nehmen

wir die Achse vorläufig rechtwinklig zur Ebene von v und K, so dass sie sich in dieser Ebene als Punkt O projicirt, so ist nach Fig. 151

$$(v + dv) r_1 = v \cdot r + du \cdot l, \quad \text{oder mit}$$

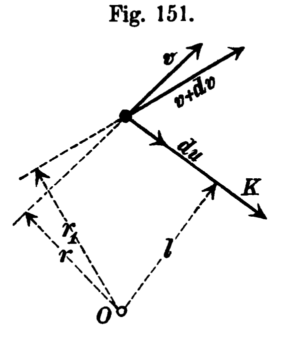
$$du = p \cdot dt = \frac{K}{m} \cdot dt:$$

$$(v + dv) r_1 - v \cdot r = \frac{K \cdot l}{m} \cdot dt \quad \text{und}$$

$$\text{1)} \qquad \frac{m(v + dv) r_1 - m \cdot v \cdot r}{dt} = K \cdot l.$$

Da nun $m \cdot v$ nach S. 171 die Bewegungsgrösse des Punktes m im Zeitpunkte t ist, so kann man $m \cdot v \cdot r$ das Moment der Bewegungsgrösse in Bezug auf die Achse O nennen, und ebenso $m(v + dv) r_1$ das Moment der Bewegungsgrösse nach dem Zeittheilchen dt. Die linke Seite der Gl. 1 ist also die Zunnahme des Momentes der Bewegungsgrösse, getheilt durch das entsprechende Zeittheilchen dt, kann daher als die Geschwindigkeit der Zunahme des Momentes der Bewegungsgrösse bezeichnet werden, die rechte Seite ist das Moment der Kraft K, bezogen auf dieselbe Achse O.

Fig. 151.



Ist aber die Achse O nicht rechtwinklig zu der durch die Geschwindigkeit v und die Kraft K bestimmten Ebene, so lege man eine Ebene E rechtwinklig zur Achse O; projicirt man dann die Geschwindigkeit v und die Kraft K auf die Ebene E und bezeichnet die Projektionen mit w bezw. P, so gilt für diese beiden eine der Gl. 1 entsprechende Beziehung, die man kürzer schreiben kann

$$\text{2)} \qquad \frac{d(m \cdot w \cdot r)}{dt} = P \cdot l.$$

Nach der Bedeutung des statischen Momentes (s. 1. Theil, S. 99/100) ist aber das Moment der wirklichen Geschwindigkeit v gleich dem Momente der Geschwindigkeitsprojektion w und das Moment der wirklichen Kraft K gleich demjenigen der Kraftprojektion P. Stellt man nun in Bezug auf irgend eine Achse O die Gl. 2 für

jeden Punkt m der Massengruppe auf und zählt die Gleichungen zusammen, so kann man schreiben

$$3)\qquad \frac{d\,\Sigma m\,w\,r}{dt} = \Sigma P l = \mathfrak{M}.$$

Die Momente der inneren Kräfte der Massengruppe heben sich, da diese Kräfte paarweise gleich und entgegengesetzt auftreten, gegenseitig auf, so dass die rechte Seite der Gl. 3 mit der Momentensumme $\mathfrak{M}$ der äusseren Kräfte gleichbedeutend ist; daher hat man den Satz:

Für irgend eine Massengruppe ist die Geschwindigkeit der Zunahme der Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf irgend eine Achse gleich der Momentensumme aller äusseren Kräfte der Massengruppe in Bezug auf dieselbe Achse. Ist in Bezug auf eine Achse die Momentensumme der äusseren Kräfte Null, so ist in Bezug auf dieselbe Achse die Momentensumme der Bewegungsgrössen konstant, d. h.

$$4)\qquad \Sigma m\,w\,r = \text{Const.}$$

Ist die Massengruppe ein Körper, welcher sich derartig um eine feste Achse dreht, dass in einem Augenblicke sämmtliche Punkte übereinstimmende Winkelgeschwindigkeit ω haben, so wird in Bezug auf diese Achse $w = r \cdot \omega$, daher nach Gl. 3:

$$5)\qquad \frac{d\,(\omega\,\Sigma m\,r^2)}{dt} = \mathfrak{M}.$$

Die Summe der Produkte der Massentheilchen m und der Quadrate ihrer Abstände r von einer festen Achse nennt man nach 1. Theil, S. 267 das **Trägheitsmoment**

$$J = \Sigma m\,r^2$$

des Körpers in Bezug auf die betreffende Achse. Daher wird Gl. 5:

$$6)\qquad \frac{d\,(\omega \cdot J)}{dt} = \mathfrak{M}.$$

Ist $\mathfrak{M} = 0$, so wird $\omega \cdot J$ konstant. Würde also bei einem ohne äusseres Kraftmoment sich drehenden Körper das Trägheitsmoment sich ändern, so müsste die Winkelgeschwindigkeit ω sich umgekehrt

ändern. Würde z. B. die Erde sich in Folge von Abkühlung zusammenziehen, so dass J sich verkleinerte, so müsste ihre Winkelgeschwindigkeit ω grösser werden. Der Umstand, dass zufolge astronomischer Beobachtungen, soweit dieselben zurückreichen, die Zeit der Umdrehung der Erde sich nicht merkbar geändert hat, lässt darauf schliessen, dass auch eine wesentliche Abkühlung der Erde in dieser Zeit nicht mehr erfolgt ist.

C. Bewegung starrer Körper.

I. Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Richtung der Achse.

In einem starren Körper werde ein Punkt A gewählt, durch diesen ein rechtwinkliges Achsenkreuz gelegt und ausserdem eine Achse AP, welche mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet (Fig. 152). Hat ein Massentheilchen m die Koordinaten x, y, z und von der Achse AP den rechtwinkligen Abstand r, so liefert es zu dem Trägheitsmoment J des Körpers in Bezug auf die Achse AP den Beitrag

Fig. 152.

$$dJ = m \cdot r^2.$$

Die Verbindungsgerade AQ von A nach dem Massenpunkt m bilde mit AP den Winkel ϑ; dann ist

$$r = AQ \cdot \sin\vartheta, \quad \text{mithin}$$

$$dJ = m \cdot \overline{AQ}^2 \sin^2\vartheta = m \cdot \overline{AQ}^2 (1 - \cos^2\vartheta). \tag{1}$$

Hat AQ die Richtungswinkel α_1, β_1, γ_1, so gilt für den Winkel ϑ zwischen den Geraden AQ und AP nach den Lehren der Analytischen Geometrie des Raumes (vergl. 2. Theil, S. 226) die Beziehung

$$\cos\vartheta = \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\gamma \cdot \cos\gamma_1 .$$

Ferner ist $$AQ^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

$$x = AQ \cdot \cos\alpha_1; \quad y = AQ \cdot \cos\beta_1; \quad z = AQ \cdot \cos\gamma_1$$ und somit

$$AQ \cdot \cos\vartheta = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

Aus Gl. 1 wird hiermit

$$2)\quad dJ = m\Big\{x^2 + y^2 + z^2 - x^2\cos^2\alpha - y^2\cos^2\beta - z^2\cos^2\gamma$$
$$- 2xy\cos\alpha\cdot\cos\beta - 2xz\cdot\cos\alpha\cdot\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cdot\cos\gamma\Big\}.$$

Da nun bekanntlich

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad \text{also}$$
$$1 - \cos^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma,$$

so kann man $x^2 - x^2\cos^2\alpha$ mit $x^2\cos^2\beta + x^2\cos^2\gamma$ vertauschen, ebenso $y^2 - y^2\cos^2\beta$ mit $y^2\cos^2\alpha + y^2\cos^2\gamma$ und $z^2 - z^2\cos^2\gamma$ mit $z^2\cos^2\alpha + z^2\cos^2\beta$. Führt man dies in Gl. 2 ein und ordnet nach den Winkeln, so wird

$$3)\quad dJ = m\Big\{\cos^2\alpha(y^2 + z^2) + \cos^2\beta(x^2 + z^2) + \cos^2\gamma(x^2 + y^2)$$
$$- 2xy\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta - 2xz\cdot\cos\alpha\cdot\cos\gamma - 2yz\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\Big\}.$$

Der rechtwinklige Abstand des Massentheilchens m von der Achse AX ist aber $\sqrt{y^2 + z^2}$, das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die x-Achse also $J_x = \Sigma m(y^2 + z^2)$; dasjenige in Bezug auf die y-Achse $J_y = \Sigma m(x^2 + z^2)$, in Bezug auf die z-Achse $J_z = \Sigma m(x^2 + y^2)$. Bei einer über den ganzen Körper erstreckten Summirung der Gl. 3, bei welcher die Winkel α, β, γ gemeinschaftlich sind, entstehen aus den letzten drei Gliedern noch die Ausdrücke

$$\Sigma mxy, \quad \Sigma mxz \quad \text{und} \quad \Sigma myz;$$

Diese Werthe heissen nach 1. Theil, S. 288 Centrifugalmomente und werden abgekürzt mit C_z, C_y und C_x bezeichnet, wobei man als Index diejenige Koordinate wählt, welche in der betreffenden Summe nicht vorkommt. Hiermit wird das Trägheitsmoment J_{AP} des Körpers in Bezug auf eine Achse AP mit den Richtungswinkeln α, β, γ:

$$4)\quad J_{AP} = \cos^2\alpha\cdot J_x + \cos^2\beta\cdot J_y + \cos^2\gamma\cdot J_z - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot C_z$$
$$- 2\cos\alpha\cdot\cos\gamma\cdot C_y - 2\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot C_x.$$

Sind nun für einen gegebenen Körper und ein festes Achsenkreuz AX, AY, AZ die Trägheits- und die Centrifugalmomente J_x, J_y, J_z, C_z, C_y, C_x bekannt, so liefert Gl. 4 für jede beliebige, durch die Richtungswinkel α, β, γ bestimmte, durch den festen Punkt A gehende Achse AP das Trägheitsmoment J_{AP}.

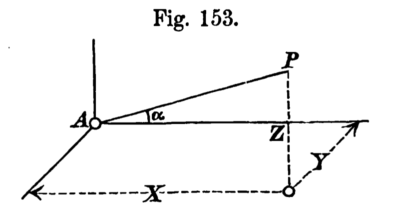
2. Trägheits-Ellipsoid und Central-Ellipsoid.

Die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes J von den Winkeln α, β, γ lässt sich für sämmtliche durch den festen Punkt A des Körpers gehende Achsen zur Anschauung bringen mittels einer Ellipsoidfläche. Trägt man auf der Achse AP eine Länge ab, welche mit J in einer bestimmten Beziehung steht, macht man nämlich

5) $$AP = \frac{1}{\sqrt{J}} \quad \text{(Fig. 153),}$$

so ergiebt sich auf dem Fahrstrahl AP ein bestimmter Endpunkt P; lässt man nun die Winkel α, β, γ alle möglichen Werthe annehmen, so ergiebt sich als geometrischer Ort des Endpunktes P eine krumme Fläche, deren Gestalt durch Gl. 4 bedingt sein muss. Bezeichnet man die Koordinaten des Punktes P mit den grossen Buchstaben X, Y, Z zum Unterschiede von den Koordinaten x, y, z des Massentheilchens, so ist nach Fig. 153

Fig. 153.



$$\cos\alpha = \frac{X}{AP} = X \cdot \sqrt{J}; \quad \text{ebenso}$$

$$\cos\beta = Y \cdot \sqrt{J}; \quad \cos\gamma = Z \cdot \sqrt{J}.$$

Führt man diese Werthe in Gl. 4 ein, so entsteht in allen Gliedern der rechten Seite, weil in denselben nur die Quadrate der Kosinus oder die Produkte zweier Kosinus vorkommen, der gemeinschaftliche Faktor J. Theilt man die Gleichung dann durch diesen gemeinschaftlichen Faktor, so verbleibt

6) $$1 = J_x X^2 + J_y Y^2 + J_z Z^2 - 2\,C_z X \cdot Y - 2\,C_y X \cdot Z - 2\,C_x Y \cdot Z.$$

Diese Gleichung zweiten Grades nach X, Y, Z mit den Koëfficienten J_x, J_y, J_z, C_z, C_y und C_x bedeutet die Oberfläche eines dreiachsigen Ellipsoides, u. zw. mit dem Mittelpunkt A, weil in ihr Glieder mit einfachem X, Y und Z nicht vorkommen. Die Hauptachsen dieses Ellipsoides, des sog. **Trägheits-Ellipsoides**, fallen im Allgemeinen nicht mit den beliebig gewählten Koordinatenachsen zusammen. Da aber die Hauptachsen des Ellipsoides zu einander rechtwinklig stehen, so ist es stets möglich, den Koordinatenachsen solche Richtungen zu geben, dass sie mit den Hauptachsen des Ellipsoides zusammenfallen. Und weil die auf die Hauptachsen bezogene Gleichung des Ellipsoides die drei letzten Glieder der Gl. 6 mit den Produkten zweier Koordinaten nicht enthält, so folgt, dass die Koëfficienten C_z, C_y und C_x dieser drei letzten Glieder zu Null werden, wenn man die Hauptachsen des Ellipsoides als Koordinatenachsen benutzt. Es giebt also durch jeden Punkt A eines Körpers ein rechtwinkliges Achsenkreuz, in Bezug auf welches die Centrifugalmomente zu Null werden; diese Achsen heissen die **Hauptachsen** des Körpers für den Punkt A. Die Trägheitsmomente in Bezug auf diese heissen **Haupt-Trägheitsmomente**; bezeichnet man sie mit J_1, J_2 und J_3, so wird die Gl. 4, S. 195, bezogen auf das Kreuz der Hauptachsen,

$$7) \qquad J_{AP} = J_1 \cos^2\alpha + J_2 \cos^2\beta + J_3 \cos^2\gamma,$$

wenn die Achse AP mit den Hauptachsen die Winkel α, β, γ bildet. Die Gleichung des Trägheits-Ellipsoides wird in Bezug auf die Hauptachsen nach Gl. 6 (S. 196) einfacher

$$8) \qquad 1 = J_1 X^2 + J_2 Y^2 + J_3 Z^2,$$

und es sind
$$\frac{1}{\sqrt{J_1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{J_2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{J_3}}$$
die Halbachsen des Ellipsoides; es entspricht also der kleinsten Halbachse das grösste der drei Haupt-Trägheitsmomente und umgekehrt. Kennt man diese, so ist nach Gl. 7 für jede andere durch den Punkt A gelegte Achse AP das Trägheitsmoment J zu berechnen.

Sind von den drei Haupt-Trägheitsmomenten zwei einander gleich, so wird das Trägheits-Ellipsoid zu einem Umdrehungs-Ellipsoide. Sind alle drei von gleicher Grösse, so wird das Trägheits-Ellipsoid zu einer Kugel. In diesem Falle sind die

Trägheitsmomente in Bezug auf alle durch den Punkt A gehende Achsen von gleicher Grösse, auch hat dann jede dieser Achsen die Eigenschaften einer Hauptachse.

Ist der Punkt A der Schwerpunkt des Körpers, so wird das Trägheits-Ellipsoid im Besonderen **Central-Ellipsoid** genannt. Kennt man die Schwerpunkts-Hauptachsen und deren Trägheitsmomente, so kann man nach Gl. 7 das Trägheitsmoment für jede Schwerpunktsachse SP berechnen und daraus wiederum das Trägheitsmoment für jede zu SP parallele Achse AP_1, welche von SP um eine Länge e entfernt ist, weil nach 1. Theil, S. 268 das Trägheitsmoment für eine beliebige Achse gleich ist dem Trägheitsmomente für eine dazu parallele Schwerpunktsachse $+ M \cdot e^2$.

Im 1. Theile, S. 290 wurden solche Drehachsen eines Körpers, für welche die Centrifugalkräfte sich vollständig aufheben, **freie Achsen** genannt. Die Bedingungen dafür waren, dass diese Achsen durch den Schwerpunkt gehen mussten, und dass ausserdem, wenn SX eine freie Achse sein sollte, und SY nebst SZ zwei andere zu SX und zu einander rechtwinklige Achsen waren, noch die Centrifugalmomente $\Sigma mxy = C_z$ und $\Sigma mxz = C_y$ Null sein mussten. Für gewisse einfache Fälle wurden a. a. O. solche freie Achsen nachgewiesen. Aus den vorstehenden Untersuchungen ergiebt sich nun, dass die Schwerpunkts-Hauptachsen eines Körpers die Bedingungen freier Achsen erfüllen, dass somit jeder Körper mindestens drei zu einander rechtwinklige freie Achsen hat.

Die im Vorstehenden entwickelten Eigenschaften des Trägheits- und Central-Ellipsoides rühren von Poinsot (geb. 1777 zu Paris, gest. 1859 daselbst) her (vom Jahre 1834); sie bilden Verallgemeinerungen der in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 25 behandelten Eigenschaften der Trägheits- und Central-Ellipse für ebene Figuren.

3. Berechnung der Trägheitsmomente einiger Körper.

Ein Körpertheilchen vom Rauminhalte $dx \cdot dy \cdot dz$ hat, wenn γ das Gewicht der Raumeinheit ist, die Masse $m = \frac{\gamma}{g} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

und einen rechtwinkligen Abstand von der z-Achse $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, liefert daher zu dem Trägheitsmoment in Bezug auf die z-Achse den Beitrag

$$dJ_z = \frac{\gamma}{g} \cdot dx \cdot dy \cdot dz\,(x^2 + y^2);$$

somit ist der allgemeine Ausdruck für das Trägheitsmoment J_z eines Körpers überall gleicher Dichte

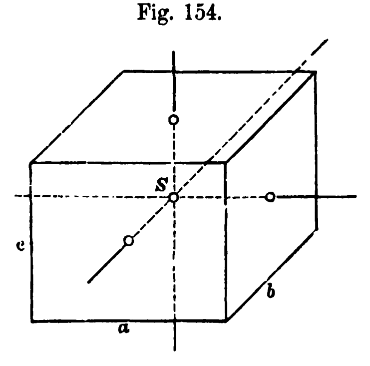
$$J_z = \frac{\gamma}{g} \int\int\int (x^2 + y^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz. \tag{1}$$

Die Grenzen der Integrationen sind durch die Form des Körpers bedingt. Doch hat man in den meisten Fällen die allgemeine Gl. 1 nicht nöthig, wenn man bereits bekannte Ergebnisse zu Hülfe nimmt. Die Werthe der Trägheitsmomente drückt man schliesslich meist als Vielfache der Masse M aus; bei der Berechnung kann man also den selbstverständlichen physikalischen Faktor $\frac{\gamma}{g}$ (Masse der Raumeinheit) fortlassen, wenn man nachher auch statt der Masse den Rauminhalt des Körpers einführt.

a) Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallelepipeds von den Kanten a, b, c in Bezug auf eine zu der Kante c parallele Schwerpunktsachse.

Eine zur z-Achse rechtwinklige Scheibe des Körpers (Fig. 154) ist eine rechteckige Platte von den Seiten a und b und der Dicke dz. Eine Rechteckfläche von den Seiten a und b hat in Bezug auf die Mittellinien die Durchmesser-Trägheitsmomente $^1/_{12}\, a \cdot b^3$ und $^1/_{12}\, b \cdot a^3$, mithin das polare Trägheitsmoment $^1/_{12}\, a \cdot b\,(b^2 + a^2)$ (s. 1. Theil, S. 271). Die Scheibe von der Dicke dz liefert daher zu J_z einen Beitrag

Fig. 154.



$$dJ_z = \frac{1}{12} a \cdot b\,(b^2 + a^2)\,dz,$$

also ist

$$J_z = \frac{1}{12} a \cdot b\,(b^2 + a^2) \cdot c = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2). \tag{2}$$

Ebenso ist

3) $$J_x = \frac{1}{12} M (b^2 + c^2); \quad J_y = \frac{1}{12} M \cdot (a^2 + c^2).$$

Sind von den drei Kanten zwei einander gleich, z. B. $b = a$, so wird

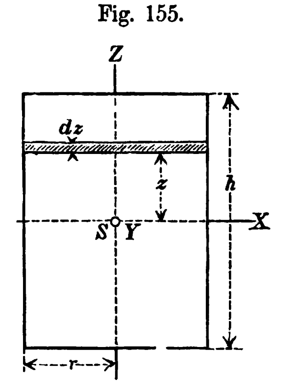
$$J_z = \frac{1}{6} M \cdot a^2; \quad J_x = J_y = \frac{1}{12} M \cdot (a^2 + c^2)$$

und das Central-Ellipsoid ein Umdrehungs-Ellipsoid. In diesem Fall ist jede in der xy-Ebene liegende Schwerpunktsachse eine freie Achse mit dem Trägheitsmoment $\frac{1}{12} M (a^2 + c^2)$. — Für den Würfel ist mit $b = c = a$ $J_z = J_y = J_x = \frac{1}{6} M a^2$, das Central-Ellipsoid eine Kugel und jede Schwerpunktsachse eine freie Achse.

b) Haupt-Trägheitsmomente eines Cylinders, bezogen auf den Schwerpunkt.

Da das Durchmesser-Trägheitsmoment einer Kreisfläche vom Halbmesser r die Grösse $\frac{1}{4} r^4 \pi$ hat (s. 1. Theil, S. 273), so hat eine kreisförmige Scheibe von dem Halbmesser r und der Dicke dz (Fig. 155) das Durchmesser-Trägheitsmoment $\frac{1}{4} r^4 \pi \cdot dz$ und ein auf die rechtwinklig zur Bildebene liegende Schwerpunktsachse SY bezogenes Trägheitsmoment

Fig. 155.



4) $$dJ_y = \frac{1}{4} r^4 \pi \cdot dz + r^2 \pi \cdot dz \cdot z^2,$$

weil z die Entfernung dieser beiden Achsen ist. Hiernach wird

$$J_y = \frac{1}{4} r^4 \pi h + r^2 \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz, \quad \text{oder}$$

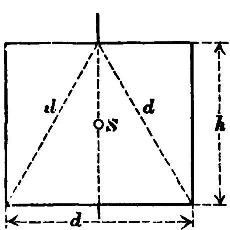
$$J_y = \frac{1}{4} r^4 \pi h + 2 r^2 \pi \cdot \frac{1}{3} \frac{h^3}{8} = \frac{r^2 \pi h}{4} \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right).$$ Also ist

5) $$J_x = J_y = \frac{1}{4} M \left(r^2 + \frac{h^2}{3} \right).$$

In Bezug auf die z-Achse aber ist (nach 1. Theil, S. 272)

$$J_z = \frac{M}{2} r^2. \tag{6}$$

Fig. 156.



Das Central-Ellipsoid ist offenbar ein Umdrehungs-Ellipsoid. Dasselbe wird zu einer Kugel für

$$\frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{6} = r^2,$$

d. h. für $h^2 = 3r^2$, oder für

$$h = r\sqrt{3} = 1{,}73 \cdot r. \tag{7}$$

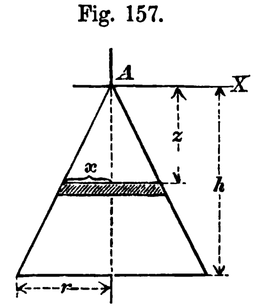
Diese Höhe ist diejenige eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite $d = 2r$ (Fig. 156). Für einen Cylinder von diesem Höhenverhältnis ist das Central-Ellipsoid eine Kugel und jede Schwerpunktsachse eine freie Achse.



c) Trägheitsmomente eines Kegels.

In Bezug auf eine zur Grundfläche parallele Achse AX durch die Spitze A des Kegels (Fig. 157) ergiebt sich das Trägheitsmoment einer kreisförmigen Scheibe vom Halbmesser x und im Abstande z von der Spitze gelegen, entsprechend der Gl. 4, zu

Fig. 157.



$$dJ_x = \frac{1}{4} x^4 \pi \cdot dz + x^2 \pi \cdot dz \cdot z^2.$$

Hieraus wird wegen

$$x = \frac{r}{h} \cdot z:$$

$$dJ_x = \frac{1}{4} \frac{r^4}{h^4} \cdot \pi \cdot z^4 \cdot dz + \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot z^4 \cdot dz, \quad \text{also}$$

$$J_x = \frac{r^2}{h^2} \pi \left\{\frac{1}{4} \frac{r^2}{h^2} + 1\right\} \cdot \int_0^h z^4 dz = \frac{r^2 \pi}{h^2} \left(\frac{1}{4} \frac{r^2}{h^2} + 1\right) \frac{h^5}{5}, \quad \text{oder}$$

$$J_x = r^2 \pi h \left(\frac{r^2}{20} + \frac{h^2}{5}\right),$$

also mit

$$r^2 \pi h = 3M:$$

$$J_x = \frac{3}{20} M (r^2 + 4h^2). \tag{8}$$

Schwingt der Kegel als physisches Pendel um die x-Achse, so ist seine Schwingungslänge (nach 1. Theil, S. 279), weil der Schwerpunkt um $^3/_4\,h$ von der Spitze entfernt ist,

$$9)\qquad l = \frac{J_x}{M \cdot {}^3/_4\,h} = \frac{3}{20} \cdot \frac{4}{3\,h}(r^2 + 4\,h^2) = \frac{h}{5}\left(4 + \frac{r^2}{h^2}\right).$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf eine mit AX parallele Schwerpunktsachse wird

$$J_1 = J_2 = J_x - M \cdot ({}^3/_4\,h)^2, \quad \text{also}$$

$$J_1 = J_2 = M\left(\frac{3}{20}r^2 + \frac{3}{5}h^2 - \frac{9}{16}h^2\right)$$

$$10)\qquad = M\left(\frac{3}{20}r^2 + \frac{3}{80}h^2\right) = \frac{3}{20}M\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right).$$

In Bezug auf die geometrische Achse des Kegels ist (nach 1. Theil, S. 273)

$$11)\qquad J_3 = \frac{3}{10}Mr^2.$$

Es wird $J_1 = J_2 = J_3$ für $r^2 + \frac{h^2}{4} = 2\,r^2$, d. h. für $h = 2\,r$.

In diesem Fall ist das Central-Ellipsoid eine Kugel und jede Schwerpunktsachse eine freie Achse.

d) Haupt-Trägheitsmomente für den Schwerpunkt eines dreiachsigen Ellipsoides.

Wird eine Kreisfläche vom Halbmesser v in einer Richtung gleichmässig gedehnt (Fig. 158), so entsteht eine Ellipse der Halbachsen v und u. Bei dieser Dehnung ändern sich der Flächeninhalt und das Trägheitsmoment in Bezug auf den Durchmesser $2\,u$ in demselben Verhältnisse. Daher bleibt für dieses Trägheitsmoment die für die Kreisfläche entwickelte Formel $J = {}^1/_4\,F \cdot v^2$ auch für die Ellipse gültig. Dies giebt, mit $F = u \cdot v \cdot \pi$,

Fig. 158.

$$J = \frac{\pi}{4}u \cdot v^3.$$

Ebenso gilt für den Durchmesser $2v$

$$J = \frac{\pi}{4} v \cdot u^3,$$

also für das polare Trägheitsmoment

$$J_0 = \frac{\pi}{4} u \cdot v (u^2 + v^2).$$

Schneidet man nun aus einem Ellipsoide rechtwinklig zur Achse AZ eine elliptische Scheibe von den Halbachsen u und v und der Dicke dz heraus (Fig. 159), so liefert diese zu dem Trägheitsmomente des Ellipsoides in Bezug auf die z-Achse einen Beitrag

$$dJ_z = \frac{\pi}{4} u \cdot v (u^2 + v^2) dz.$$

Fig. 159.

Wird dies von $z = 0$ bis $z = c$ summirt, so ergiebt sich das Trägheitsmoment des halben Ellipsoides, und für dasjenige des ganzen gilt das doppelte:

$$J_z = \frac{\pi}{2} \int_0^c u \cdot v (u^2 + v^2) dz.$$

Nun sind u und z die Koordinaten eines Punktes des einen elliptischen Hauptschnittes von den Halbachsen a und c, daher

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{oder} \quad u^2 = a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right); \quad \text{ebenso} \quad v^2 = b^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Hiermit wird $$J_z = \frac{\pi}{2} \frac{a \cdot b}{c^2} \frac{a^2 + b^2}{c^2} \int_0^c (c^2 - z^2)^2 dz$$

und nach einfacher Ausführung

$$J_z = \frac{4}{15} \pi \cdot a \cdot b \cdot c (a^2 + b^2).$$

Da nun $$M = \frac{4}{3} a \cdot b \cdot c \cdot \pi$$ ist, so folgt schliesslich

12) $$J_z = \frac{M}{5} (a^2 + b^2).$$

Ebenso wird

13) $$J_y = \frac{M}{5}(a^2 + c^2); \quad J_z = \frac{M}{5}(b^2 + c^2).$$

Für die Kugel wird mit $b = c = a$

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} Ma^2 \quad \text{(s. 1. Theil, S. 273).}$$

4. Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse.

Bei einem starren Körper ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehachse unveränderlich, daher wird aus Gl. 6, S. 193

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = \mathfrak{M}.$$

Hierin ist $\frac{d\omega}{dt}$ die Winkelbeschleunigung; bezeichnet man dieselbe mit ε, so hat man die aus 1. Theil, S. 276 bekannte Gleichung für die ungleichförmige Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse

1) $$\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J},$$

wenn $\mathfrak{M}$ die Momentensumme der äusseren Kräfte, J das Trägheitsmoment des Körpers, beide bezogen auf die Drehachse, bedeuten.

Auch kann man, wenn für irgend einen Zeitraum ω_1 den Anfangswerth, ω den Endwerth der Winkelgeschwindigkeit, $\mathfrak{A}_k$ die Arbeit der äusseren Kräfte bedeutet, nach dem Satze der Arbeit schreiben (s. 1. Theil, S. 267)

2) $$(\omega^2 - \omega_1{}^2)\frac{J}{2} = \mathfrak{A}_k.$$

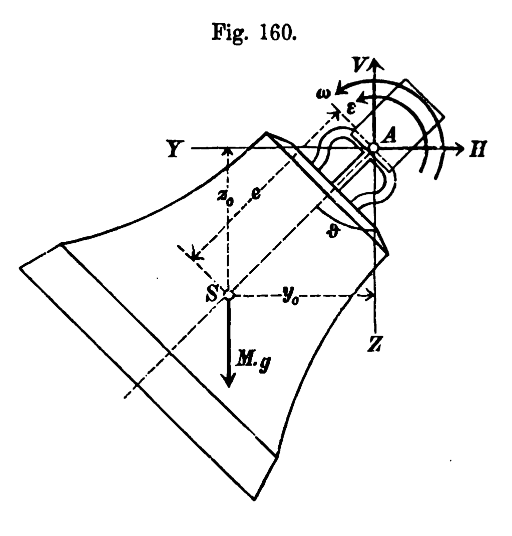
Die Berechnung der Widerstände, welche an der Drehachse eines Körpers angreifen müssen, um sie unbeweglich zu erhalten, ist auch schon im 1. Theile, S. 287 allgemein gezeigt worden. Hier sollen noch einige Beispiele dieser Art durchgeführt werden.

5. Widerstände der Achse einer schwingenden Glocke.

Die an der Achse einer Thurmglocke auftretenden Kräfte sind von besonderer Wichtigkeit, da sie nicht nur die Abmessungen

des sog. Glockenstuhles, sondern, wegen der hohen Lage des letzteren, häufig auch die Standsicherheit des Thurmes bedingen. Die zur wagerechten Drehachse (x-Achse) der Glocke rechtwinklige yz-Ebene durch den Schwerpunkt S ist eine Symmetrieebene (Fig. 160); daher muss in ihr auch der Gesammtwiderstand der Drehachse liegen und sich in zwei Hälften auf die symmetrisch angeordneten beiden Drehzapfen vertheilen. Aus diesem Grunde kommen bei dieser Aufgabe nur die Projektionen der Kräfte auf die yz-Ebene in Frage, wodurch die Untersuchung so vereinfacht wird, dass wir nicht auf die allgemeinen Gleichungen (1. Theil, S. 288) zurückgreifen, sondern die Aufgabe unmittelbar behandeln wollen.

Fig. 160.

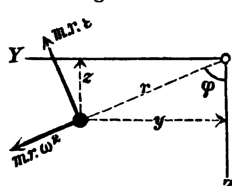


In einem beliebigen Zeitpunkte t weiche der Drehungshalbmesser $AS = e$ des Schwerpunktes um den Winkel ϑ von der Lothrechten ab, Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung seien ω und ε, die Koordinaten des Schwerpunktes

1) $y_0 = e \cdot \sin\vartheta;\quad z_0 = e \cdot \cos\vartheta.$

Einem Massentheilchen m der Glocke im Abstand r von der Drehachse und mit den Koordinaten

Fig. 161.



$$y = r \sin\varphi;\quad z = r \cos\varphi$$

(Fig. 161) entsprechen nach 1. Theil, S. 277 die Ergänzungskräfte $m \cdot r \cdot \omega^2$ und $m \cdot r \cdot \varepsilon$, welche in den Richtungen der positiven y- und z-Achse zusammen die Seitenkräfte liefern

$$m \cdot r \cdot \omega^2 \sin\varphi + m \cdot r \cdot \varepsilon \cos\varphi = m \cdot y \cdot \omega^2 + m \cdot z \cdot \varepsilon \quad \text{und}$$

$$m \cdot r \cdot \omega^2 \cos\varphi - m \cdot r \cdot \varepsilon \sin\varphi = m \cdot z \cdot \omega^2 - m \cdot y \cdot \varepsilon.$$

Die wirklichen äusseren Kräfte H, V und Mg (Fig. 160) müssen nun nach dem Satze d'Alembert's (s. 1. Theil, S. 139) der Gesammtheit der Ergänzungskräfte das Gleichgewicht halten, wenn V und H die Seitenkräfte des Gesammtwiderstandes der Drehachse sind. Hiernach wird

2) $$H = \Sigma m \cdot y \cdot \omega^2 + \Sigma m \cdot z \cdot \varepsilon \quad \text{und}$$

3) $$V = M \cdot g + \Sigma m \cdot z \cdot \omega^2 - \Sigma m \cdot y \cdot \varepsilon,$$

oder, weil in diesen Summen die Grössen ω^2 und ε gemeinschaftliche Faktoren und ausserdem

$$\Sigma my = My_0 = Me \sin\vartheta, \quad \Sigma mz = Mz_0 = Me\cos\vartheta \quad \text{sind,}$$

4) $$H = \omega^2 \cdot M \cdot e \cdot \sin\vartheta + \varepsilon \cdot M \cdot e \cdot \cos\vartheta,$$

5) $$V = M \cdot g + \omega^2 \cdot M \cdot e \cdot \cos\vartheta - \varepsilon \cdot M \cdot e \cdot \sin\vartheta.$$

Ist nun α der grösste Werth von ϑ, entsprechend der höchsten Lage des Schwerpunktes mit der Geschwindigkeit Null, so hat sich der Schwerpunkt bis zu der beliebigen Zwischenlage um $e \cdot \cos\vartheta - e \cdot \cos\alpha$ gesenkt. Wenn man daher die Bewegungswiderstände der Glocke und auch die zu deren Überwindung aufzuwendende Triebkraft vernachlässigt, so ist nach dem Satze der Arbeit (S. 204)

6) $$\omega^2 \frac{J}{2} = M \cdot g \cdot e(\cos\vartheta - \cos\alpha)$$

und die Winkelbeschleunigung

7) $$\varepsilon = \frac{M \cdot g \cdot y_0}{J} = \frac{M \cdot g \cdot e \cdot \sin\vartheta}{J}.$$

Führt man noch mit $J = M \cdot i^2$ den Trägheitshalbmesser i der Glocke ein, so ergiebt sich

$$\omega^2 = 2\frac{M \cdot e}{J} g(\cos\vartheta - \cos\alpha) = \frac{2eg}{i^2}(\cos\vartheta - \cos\alpha),$$

$$\varepsilon = \frac{M \cdot e}{J} \cdot g \cdot \sin\vartheta = \frac{e \cdot g}{i^2} \sin\vartheta,$$

und hiermit wird aus den Gl. 4 und 5

8) $$H = Mg\frac{e^2}{i^2}(3\sin\vartheta\cos\vartheta - 2\cos\alpha\sin\vartheta),$$

9) $$V = Mg\left(1 + \frac{e^2}{i^2}[3\cos^2\vartheta - 2\cos\alpha\cos\vartheta - 1]\right).$$

Die Grösse des wagerechten Widerstandes H wird zu Null für $\vartheta = 0$, d. h. für die tiefste Stellung der Glocke und für

$\cos\vartheta = {}^2/_3 \cos\alpha$, was nur bei $\alpha > 90^0$ Sinn hat. H wechselt selbstverständlich sein Vorzeichen übereinstimmend mit ϑ, ist also bald nach rechts, bald nach links gerichtet. Wichtig ist die Kenntnis des Grösstwerthes von H; diesen findet man leicht durch Nullsetzung der ersten Abgeleiteten von Gl. 8 nach ϑ, d. h.

$$3\cos^2\vartheta - 3\sin^2\vartheta - 2\cos\vartheta\cos\alpha = 0,$$

woraus mit $\sin^2\vartheta = 1 - \cos^2\vartheta$ schliesslich sich ergiebt:

$$10)\qquad \cos\vartheta_1 = \frac{1}{6}\cos\alpha \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{\cos\alpha}{6}\right)^2}.$$

Die äussersten Werthe von V ergeben sich für

$$-6\cos\vartheta\sin\vartheta + 2\cos\alpha\sin\vartheta = 0;$$

d. h. für $\sin\vartheta = 0$, oder $\vartheta = 0$ entsteht V_{max},

für $\cos\vartheta = {}^1/_3\cos\alpha$ entsteht V_{min}.

Die Einsetzung dieser Werthe in Gl. 9 liefert

$$11)\qquad V_{max} = Mg\left(1 + 2\frac{e^2}{i^2}[1 - \cos\alpha]\right),$$

$$12)\qquad V_{min} = Mg\left(1 - \frac{e^2}{i^2}\left[1 + \frac{\cos^2\alpha}{3}\right]\right).$$

Für die Berechnung der Grösstwerthe von H und V ist besonders die Kenntnis der Grössen e und i erforderlich. Ist nun Fig. 162 der Querschnitt der Glocke und AX die Drehachse, so kann man sich die Glocke in sehr viele wagerechte Ringe zerlegt denken. Ein solcher Ring habe den inneren und äusseren Halbmesser x_1 bezw. x_2, die Höhe dz, den Abstand z von der AX. Dann liefert dieser Ring zum statischen Momente $\mathfrak{S}$ den Beitrag

Fig. 162.

$$d\mathfrak{S} = \frac{\gamma}{g}(x_2^2 - x_1^2)\pi\cdot dz\cdot z;$$

das statische Moment der metallenen Glocke ist also

$$\frac{\gamma}{g}\cdot\pi\Sigma(x_2^2 - x_1^2)z\cdot dz$$

(γ das Gewicht von 1 cbm Glockenmetall); dazu kommt noch das statische Moment des (gewöhnlich) hölzernen Helmes der Glocke,

welches sich bei gegebenen Abmessungen leicht berechnen lässt. Bezeichnet man dies mit $\mathfrak{S}_h$, so ist das ganze statische Moment der Glocke

$$\mathfrak{S} = \frac{\gamma}{g}\pi\Sigma(x_2^2 - x_1^2)\,z\cdot dz + \mathfrak{S}_h. \tag{13}$$

$\mathfrak{S}_h$ wird übrigens < 0, da der Helm (Fig. 160) grösstentheils oberhalb der Achse AX liegt. Offenbar ist das Gewicht

$$Mg = \gamma\pi\Sigma(x_2^2 - x_1^2)\,dz + M_h\cdot g,$$

wenn $M_h g$ das Gewicht des Helmes bedeutet. Dann findet sich leicht

$$e = \frac{\mathfrak{S}}{M}. \tag{14}$$

Das polare Trägheitsmoment des Ringes ist

$$\tfrac{1}{2}(x_2^4 - x_1^4)\,\pi\cdot dz,$$

das Durchmesser-Trägheitsmoment mithin

$$\tfrac{1}{4}(x_2^4 - x_1^4)\,\pi\cdot dz$$

und dasjenige in Bezug auf die AX:

$$\tfrac{1}{4}(x_2^4 - x_1^4)\,\pi\cdot dz + (x_2^2 - x_1^2)\,\pi\cdot dz\cdot z^2.$$ Daher wird

$$J_x = \frac{\gamma}{g}\cdot\pi\left\{\Sigma\frac{1}{4}(x_2^4 - x_1^4)\cdot dz + \Sigma(x_2^2 - x_1^2)\,z^2\cdot dz\right\} + J_h, \tag{15}$$

wenn J_h das Trägheitsmoment des Helmes bedeutet. Hiernach findet man

$$i^2 = \frac{J_x}{M}. \tag{16}$$

Beispiel: Der Geh. Finanzrath Köpcke zu Dresden hat im Jahre 1871 (s. Protokoll des sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins vom 18. November 1871, S. 58) nach Zeichnungen und ausgeführten Glocken ermittelt, dass, wenn R den unteren Halbmesser der Glocke bezeichnet, etwa folgende Beziehungen stattfinden:

$$e = 1{,}225\,R;\quad i^2 = 1{,}895\,R^2;\quad \text{also}\quad \frac{e^2}{i^2} = 0{,}7919, \tag{17}$$

wofür rund 0,8 gesetzt werden möge. An einer vorhandenen Glocke lassen sich diese Werthe prüfen durch Beobachtung der Schwingungsdauer t und Herleitung der Schwingungslänge l aus dieser. Es ist nämlich für die Glocke als Pendel (nach 1. Theil, S. 279)

$$l = \frac{J}{M\cdot e} = \frac{i^2}{e} = \frac{1{,}895}{1{,}225}R = 1{,}547\,R; \tag{18}$$

dies muss $= \frac{gt^2}{\pi^2}$ oder rund $= t^2$ sein (weil g nahezu $= \pi^2$ ist).

Nimmt man noch an, dass die Mittellinie der Glocke beim grössten Ausschlage sich um 20° über die Wagerechte erhebe, dass also $\alpha = 110°$ sei, so wird nach Gl. 10 mit $\cos\alpha = -0{,}342$:

$$\cos\vartheta_1 = -0{,}057 \pm \sqrt{0{,}5 + 0{,}057^2} = 0{,}652 \quad \text{und} \quad -0{,}766.$$

Dem entsprechen $\vartheta_1 = 49°\,18'$ mit $\sin\vartheta_1 = 0{,}758$, sowie $\vartheta_1 = 130°$, welcher letztere Werth hier aber keine Bedeutung hat, da er wegen $\alpha = 110°$ nicht vorkommt. Mit $\vartheta_1 = 49°\,18'$ wird dann aus Gl. 8:

$$H_{max} = Mg \cdot 0{,}8\,(3 \cdot 0{,}758 \cdot 0{,}652 + 2 \cdot 0{,}342 \cdot 0{,}758) = 1{,}60 \cdot Mg.$$

Für $\vartheta = 0$, d. h. in der tiefsten Lage der Glocke entsteht (Gl. 11)

$$V_{max} = Mg \cdot (1 + 2 \cdot 0{,}8\,[1 + 0{,}342]) = 3{,}147\,Mg;$$

für $\cos\vartheta_2 = {}^1/_3 \cos\alpha = -0{,}114$, d. h. $\vartheta_2 = 96°\,33'$ entsteht (Gl. 12)

$$V_{min} = Mg\,(1 - 0{,}8\,[1 + 0{,}039]) = 0{,}17\,Mg.$$

Bei heftigerem Läuten, d. h. grösserem Winkel α würde V_{min} selbst < 0 werden können; bleiben die Verhältnisse der Glocke im Übrigen ungeändert, so erfolgt dies für $\cos\alpha < -0{,}866$ oder $\alpha > 150°$. Bei so grossem Schwingungswinkel würde $V_{min} < 0$ werden, d. h. die Glocke das Bestreben haben, aus den Lagern zu springen.

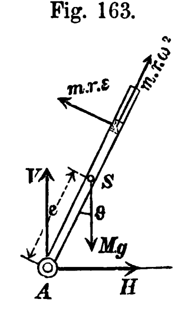
Wegen des starken Wechsels der Kraftgrössen empfiehlt es sich, die einzelnen Theile des Glockenstuhles so zu bemessen, dass die bei einer statischen Berechnung auf Grund obiger Kräfte entstehenden Spannungen σ ein Drittel der Spannungen an der Elasticitätsgrenze nicht überschreiten; für Stabeisen wäre etwa $\sigma = 500$ kg/qcm zu setzen. Die gedrückten Theile sollen mindestens 7fache Sicherheit gegen Zerknicken haben.

Bezüglich der Bedingungen für ein gutes Anschlagen des Klöppels möge auf die Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1877, S. 151 verwiesen werden.

6. Aus lothrechter Stellung umfallender Stab.

Der stabförmige Körper, dessen Schwerpunkt S in dem Abstand e vom unteren Ende A liegt (Fig. 163), sei um das untere Ende drehbar, ursprünglich nahezu lothrecht gestellt und falle um. In einer beliebigen Zwischenstellung, in welcher AS mit der Lothrechten den Winkel ϑ einschliesst, ist nach S. 204 die Winkelbeschleunigung

Fig. 163.



$$1)\qquad \varepsilon = \frac{Mge\sin\vartheta}{J} = g\frac{e}{i^2}\sin\vartheta,$$

und für die Winkelgeschwindigkeit ω gilt

$$\omega^2\frac{J}{2} = Mge\,(1 - \cos\vartheta), \quad \text{also}$$

$$2)\qquad \omega^2 = 2g\frac{e}{i^2}(1 - \cos\vartheta).$$

Die Widerstände H und V, welche der untere Drehpunkt A im Sinne der Fig. 163 leisten muss, bestimmen sich in der bei dem vorigen Beispiele gezeigten Weise leicht zu

$$H = M \cdot e \cdot \varepsilon \cdot \cos\vartheta - M \cdot e \cdot \omega^2 \sin\vartheta \quad \text{und}$$
$$V = Mg - Me\varepsilon \sin\vartheta - Me\omega^2 \cos\vartheta,$$

oder mittels der Gl. 1 und 2 zu

3) $$H = Mg\frac{e^2}{i^2}\sin\vartheta(3\cos\vartheta - 2) \quad \text{und}$$

4) $$V = Mg\left(1 - \frac{e^2}{i^2}[1 + 2\cos\vartheta - 3\cos^2\vartheta]\right).$$

Der Werth von H ist zu Anfang, d. h. für $\vartheta = 0$, ebenfalls Null; er wird wiederum zu Null für $\cos\vartheta = {}^2/_3$, d. h. für $\vartheta = 48^0$ (vergl. 1. Theil, S. 74). Für $\vartheta < 48^0$ ist $\cos\vartheta > {}^2/_3$ und $H > 0$, d. h. (Fig. 163) nach derjenigen Seite gerichtet, nach welcher die Stange umfällt. Es hat also, wenn die Stange nach rechts umfällt, das untere Ende derselben anfänglich das Bestreben nach links auszugleiten. Zwischen den beiden Nullwerthen von H liegt ein Maximum für einen Werth von $\cos\vartheta$, den man leicht durch Nullsetzung der ersten Abgeleiteten von Gl. 3 nach ϑ ermittelt zu

$$\cos\vartheta = \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = 0{,}8933 \quad \text{mit} \quad \vartheta = 26^0\,40'$$

(ein $\cos\vartheta < 0$ hat hier keinen Sinn); der entsprechende Werth von H selbst ergiebt sich dann zu

$$H_{max} = Mg\frac{e^2}{i^2}\cdot 0{,}305.$$

Für $\vartheta > 48^0$ ist $\cos\vartheta < {}^2/_3$ und $H < 0$; es hat nunmehr das untere Ende der Stange das Bestreben, nach rechts auszugleiten. Für $\vartheta = 90^0$, d. h. beim Aufschlagen der Stange auf den wagerecht gedachten Boden ist

$$H = -2\,Mg\frac{e^2}{i^2}.$$

Was die Grösse des lothrechten Widerstandes V anlangt, so ist zu Anfang, d. h. für $\vartheta = 0$, $V = Mg$. Mit wachsendem ϑ nimmt V zunächst ab. Ein Kleinstwerth von V ergiebt sich leicht für $\cos\vartheta = {}^1/_3$ oder $\vartheta = 70^0\,30'$, nämlich

$$V_{min} = Mg\left(1 - \frac{4}{3}\,\frac{e^2}{i^2}\right).$$

Dann nimmt V wieder zu, und für $\vartheta = 90^0$ wird

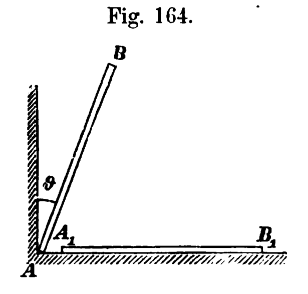
$$V = Mg\left(1 - \frac{e^2}{i^2}\right).$$

Der in vorstehenden Gleichungen auftretende Werth $\frac{e^2}{i^2}$, gleichbedeutend mit $\frac{e}{l}$ (vergl. S. 208, Gl. 18), wenn l die Schwingungslänge des am unteren Ende A aufgehängten Stabes ist, richtet sich nach der Massenvertheilung des Stabes. Ist die Masse gleichmässig über die Länge a vertheilt, so ist

$$e = \frac{a}{2}, \quad i^2 = \frac{a^2}{3}, \quad l = \frac{2}{3}a, \quad \text{daher} \quad \frac{e^2}{i^2} = \frac{e}{l} = \frac{3}{4},$$

womit man für H und V leicht bestimmtere Ausdrücke aus vorstehenden Gleichungen erhält. Dieselben Werthe gelten offenbar für eine rechteckige, lothrecht aufgestellte, um die Unterkante drehbare Platte von gleichmässiger Gewichtsvertheilung.

Fig. 164.



Ist die Anordnung so getroffen, dass durch einen Vorsprung oder eine lothrechte Wand wohl ein Ausgleiten des unteren Endes nach links, nicht aber nach rechts verhindert wird (Fig. 164), so gelten die vorstehend entwickelten Gleichungen nur bis zu dem Drehungswinkel $\vartheta = 48^0$ und vermöge des in Wirklichkeit meist auftretenden Reibungswiderstandes noch um ein gewisses Mafs darüber hinaus. Bei weiterer Annäherung des Körpers an den wagerechten Boden kann die erforderliche, jetzt negative, d. h. nach links gerichtete Kraft H durch die Reibung nicht mehr geliefert werden, und es findet nun ein Ausgleiten des unteren Endes der Stange nach rechts hin wirklich statt, so dass der umgefallene Körper sich schliesslich in einer Lage $A_1 B_1$ auf dem Boden findet. Weiteres s. S. 233.

7. Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt.

Ein Körper drehe sich unter Einwirkung äusserer Kräfte um einen festen Punkt A, dann lässt sich nach S. 23 seine Bewegung

in jedem Zeitpunkte zurückführen auf die Drehung um eine durch den Punkt A gehende augenblickliche Drehachse AP. Es wird nun

1. der Körper seine Lage im Raume ändern;
2. die augenblickliche Drehachse ihre Lage sowohl im Raume wie auch gegen den Körper ändern;
3. wird auch die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ω eine Grössenänderung erfahren.

Die drei Hauptachsen des Körpers für den Punkt A seien bekannt; dieselben liegen gegen den Körper fest, werden daher ihre Richtung im Raum ändern.

Wir denken uns durch den festen Punkt A (Fig. 165) drei feste Achsen gelegt, die so gewählt sind, dass sie im Zeitpunkte t mit den Hauptachsen zusammenfallen.

Fig. 165.

Die diesem Zeitpunkt entsprechende Winkelgeschwindigkeit ω kann nach S. 35 (genau wie eine Kraft) zerlegt werden in die Seitengeschwindigkeiten

$$\varphi = \omega \cdot \cos \alpha;$$
$$\chi = \omega \cdot \cos \beta;$$
$$\psi = \omega \cdot \cos \gamma$$

um die Hauptachsen; α, β, γ seien die Richtungswinkel der AP; ferner seien J_1, J_2, J_3 die drei Haupt-Trägheitsmomente, $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ die Momentensummen der äusseren Kräfte in Bezug auf die Hauptachsen.

Um die Beziehung zwischen der Drehbewegung um den festen Punkt A und den äusseren Kräften zu erhalten, wendet man den Satz von der Momentensumme der Bewegungsgrössen an. Daher bestimmen wir diese Momentensummen zunächst für den Zeitpunkt t, sodann für den Zeitpunkt $t + dt$ und setzen die auf die Zeiteinheit bezogenen Zunahmen dieser Grössen gleich den entsprechenden Kraftmomenten.

Um die Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf die x-Achse zu finden, bedenke man, dass ein Massenpunkt m (Fig. 166) mit den Koordinaten x, y, z und einem Abstand r_1 von der x-Achse wegen der Winkelgeschwindigkeit φ um die x-Achse eine Geschwindigkeit $\varphi \cdot r_1$ mit dem Hebelarme r_1, also ein Moment der Bewegungsgrösse $m \cdot \varphi \cdot r_1^2$ hat. Ist r_2 der rechtwinklige

Abstand des Massenpunktes von der y-Achse (Fig. 167), so entspricht der Winkelgeschwindigkeit χ um die y-Achse eine Geschwindigkeit $\chi \cdot r_2$, welche sich leicht in $\chi \cdot z$ und $-\chi \cdot x$ im Sinne der x- bezw. z-Achse zerlegen lässt. Ebenso erhält man wegen der Winkelgeschwindigkeit ψ um die z-Achse die Seitengeschwindigkeiten

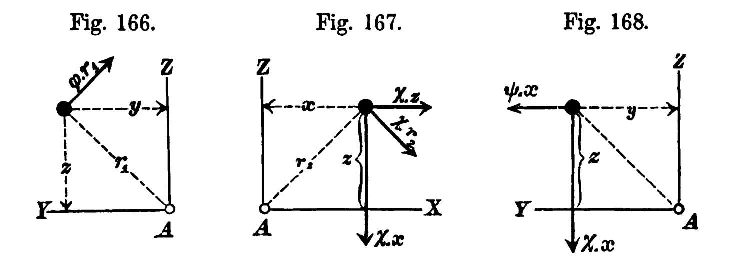


Fig. 166. Fig. 167. Fig. 168.

$-\psi \cdot y$ und $+\psi \cdot x$ im Sinne der x- bezw. der y-Achse. Zu dem Momente der Bewegungsgrösse in Bezug auf die x-Achse liefern die parallel der x-Achse gerichteten Seitengeschwindigkeiten keinen Beitrag; es kommen daher, abgesehen von dem schon erledigten Beitrage $m\varphi \cdot r_1^2$ der Winkelgeschwindigkeit φ, nur noch die beiden in Fig. 168 angegebenen Geschwindigkeiten mit den Momenten $-\chi \cdot x \cdot y$ und $-\psi \cdot x \cdot z$ in Frage.

Sonach wird die Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf die x-Achse im Zeitpunkte t:

$$\Sigma(m\varphi \cdot r_1^2) - \Sigma(m \cdot \chi \cdot x \cdot y) - \Sigma(m \cdot \psi \cdot x \cdot z).$$

Da nun die Winkelgeschwindigkeiten φ, χ, ψ für diese Summen konstante Faktoren sind und da $\Sigma(m \cdot r_1^2)$ das Trägheitsmoment J_1 bedeutet, so wird obige Momentensumme

$$J_1 \cdot \varphi - \chi \Sigma m x y - \psi \Sigma m x z.$$

Weil aber in Bezug auf die Hauptachsen die Centrifugalmomente gleich Null sind, so vereinfacht sich obige Momentensumme zu

$$J_1 \cdot \varphi.$$

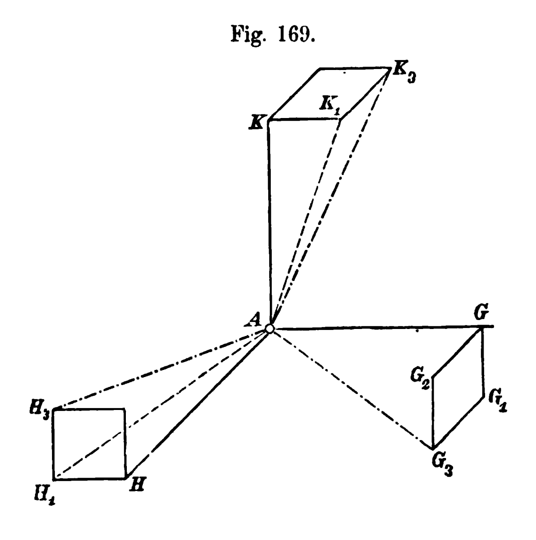
Ebenso werden für den Zeitpunkt t die Momentensummen der Bewegungsgrössen in Bezug auf die anderen beiden Achsen

$$J_2 \cdot \chi \text{ und } J_3 \cdot \psi.$$

Zur Ermittelung der entsprechenden Momentensummen für den Zeitpunkt $t + dt$ darf man nun nicht etwa in dem Ausdruck $J_1 \cdot \varphi$

einfach φ mit $\varphi + d\varphi$ vertauschen. Wohl ist $J_1(\varphi + d\varphi)$ die Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf die erste Hauptachse; jedoch ist zu bedenken, dass der hier in Frage kommende Satz in Bezug auf Achsen unveränderlicher Richtung, z. B. die festen Koordinatenachsen, gilt, dass die Hauptachsen des Körpers sich aber während der Zeit dt um gewisse, wenn auch unendlich kleine, Winkel gegen ihre ursprüngliche Richtung, d. h. gegen die festen Koordinatenachsen, verdreht haben. Es müssen daher zunächst die Winkel bestimmt werden, welche die Hauptachsen im Zeitpunkte $t + dt$ mit der x-Achse einschliessen.

Fig. 169.



Zu dem Ende denken wir uns auf den Hauptachsen, welche im Zeitpunkte t noch mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, die Längen $AG = AH = AK = 1$ abgetragen (Fig. 169).

Vermöge der Winkelgeschwindigkeit χ um die AY bewegt sich G nach G_1 um $GG_1 = \chi \cdot dt$. Vermöge der Winkelgeschwindigkeit ψ um die AZ bewegt sich G um $GG_2 = \psi \cdot dt$. Die Folge beider Geschwindigkeiten ist eine Verrückung des Punktes G nach G_3, d. h. eine Verdrehung der ersten Hauptachse um den Winkel

$$GAG_3 = dt\sqrt{\chi^2 + \psi^2}.$$

Die zweite Hauptachse schliesst Anfangs mit der x-Achse den Winkel $\frac{\pi}{2}$ ein. Dieser Winkel wird nicht geändert durch die Drehung um AX und um AY, sondern nur durch die Drehung um AZ, so dass im Zeitpunkte $t + dt$ die zweite Hauptachse mit der x-Achse den Winkel $H_3AG = \frac{\pi}{2} + \psi \cdot dt$ einschliesst.

Der Winkel der dritten Hauptachse gegen AX wird nur durch die Winkelgeschwindigkeit χ verändert und geht in

$$K_3 AG = \frac{\pi}{2} - \chi \cdot dt$$

über. Multiplicirt man die Momentensummen der Bewegungsgrössen in Bezug auf die drei Hauptachsen für den Zeitpunkt $t + dt$, also

$$J_1(\varphi + d\varphi), \quad J_2(\chi + d\chi), \quad J_3(\psi + d\psi),$$

mit den Kosinus der soeben bestimmten Winkel, so bekommt man durch Zusammenzählen die Momentensumme in Bezug auf die x-Achse für den Zeitpunkt $t + dt$. Dies ergiebt:

$$J_1(\varphi + d\varphi) \cdot \cos(dt\sqrt{\chi^2 + \psi^2})$$
$$+ J_2(\chi + d\chi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi \cdot dt\right)$$
$$+ J_3(\psi + d\psi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi \cdot dt\right).$$

Weil aber $\cos(dt \cdot \sqrt{\chi^2 + \psi^2}) = 1$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi \cdot dt\right) = -\sin(\psi \cdot dt) = -\psi \cdot dt,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi \cdot dt\right) = \sin(\chi \cdot dt) = \chi \cdot dt$$

ist, so entsteht

$$J_1(\varphi + d\varphi) - J_2(\chi + d\chi)\psi \cdot dt + J_3(\psi + d\psi) \cdot \chi \cdot dt.$$

Zieht man hiervon ab die anfängliche Momentensumme $J_1 \varphi_1$, vernachlässigt die Unendlichkleinen zweiter Ordnung und theilt schliesslich durch dt, so ergiebt sich

$$J_1 \cdot \frac{d\varphi}{dt} - J_2 \cdot \chi \cdot \psi + J_3 \cdot \chi \cdot \psi$$

als Zunahme der Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf die x-Achse für die Zeiteinheit, welche nach S. 193 gleich der Momentensumme $\mathfrak{M}_x$ der äusseren Kräfte ist. Somit hat man die Gleichung

$$1) \qquad J_1 \cdot \frac{d\varphi}{dt} - (J_2 - J_3)\chi \cdot \psi = \mathfrak{M}_x.$$

Ebenso folgt für die anderen Achsen

$$2)\qquad J_2 \cdot \frac{d\chi}{dt} - (J_3 - J_1)\psi \cdot \varphi = \mathfrak{M}_y,$$

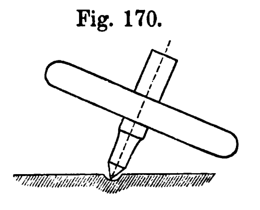
$$3)\qquad J_3 \cdot \frac{d\psi}{dt} - (J_1 - J_2) \cdot \varphi \cdot \chi = \mathfrak{M}_z.$$

Dies sind die von Leonhard Euler im Jahre 1758 entwickelten Gleichungen für die Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt.

8. Bewegung des Kreisels.

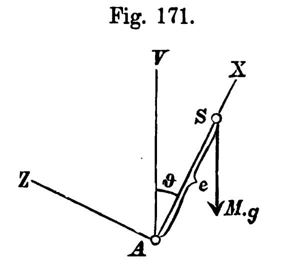
Unter einem Kreisel denken wir uns einen Körper, bestehend aus einer Achse mit einem darauf befestigten Schwungringe. Dem Körper werde eine bedeutende Winkelgeschwindigkeit φ_0 um seine zunächst festgehaltene Achse ertheilt; setzt man ihn dann in beliebig schiefer Lage mit dem unteren Ende A der Achse in ein Kugellager, welches den Punkt A (nahezu) unbeweglich macht, oder befand er sich schon, bevor er in Drehung versetzt wurde, in einem solchen (Fig. 170), so fällt der Kreisel unter Einwirkung der Schwere nicht etwa um, wie es ohne die Drehung geschehen würde, vielmehr beschreibt die geometrische Achse des Kreisels bekanntlich eine Kegelfläche, deren Achse die durch A gelegte Lothrechte ist, wobei aber die Leitlinie nicht ein Kreis, sondern eine von zwei koncentrischen Kreisen eingeschlossene, epicykloidenartige Kurve ist. Dies ergiebt sich wie folgt:

Fig. 170.



Die geometrische Achse ist offenbar eine Hauptachse des Kreisels für den Punkt A und werde zur x-Achse genommen. Jede durch A rechtwinklig zur x-Achse gelegte Gerade ist ebenfalls eine Hauptachse. Wählt man die durch AX bestimmte lothrechte Ebene zur xz-Ebene, so liegen hierdurch die Achsen AZ und AY fest; letztere ist in Fig. 171 rechtwinklig zur Bildebene zu denken. Die Lothrechte durch den Punkt A werde

Fig. 171.



AV genannt; sie schliesse mit AX den veränderlichen Winkel ϑ ein. Da wegen der regelmässigen Gestalt des Kreisels das Trägheits-Ellipsoid für den Punkt A offenbar ein Umdrehungs-Ellipsoid, so ist $J_3 = J_2$.

Die Winkelgeschwindigkeiten sind

im Zeitpunkte $t = 0$: φ_0, $\chi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$,

im Zeitpunkte t: φ, χ, ψ.

Die Kraftmomente rühren, wenn man die Reibung im Kugellager vernachlässigt, nur vom Gewichte her; dann ist

$$\mathfrak{M}_x = 0; \quad \mathfrak{M}_y = M \cdot g \cdot e \sin\vartheta; \quad \mathfrak{M}_z = 0.$$

Hiernach wird aus den Euler'schen Gleichungen 1 bis 3, S. 215/6:

1) $$J_1 \frac{d\varphi}{dt} = 0;$$

2) $$J_2 \frac{d\chi}{dt} - (J_2 - J_1)\psi \cdot \varphi = Mge \sin\vartheta;$$

3) $$J_2 \frac{d\psi}{dt} - (J_1 - J_2)\varphi \cdot \chi = 0.$$

Bei der Auflösung dieser Gleichungen folgen wir im Wesentlichen Schells Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1. Aufl., S. 831.

Nach der ersten Gleichung ist φ unveränderlich, d. h.

4) $$\varphi = \varphi_0.$$

Aus den Annahmen ergiebt sich unmittelbar

5) $$\chi = \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Multiplicirt man Gl. 2 mit $\chi \cdot dt = d\vartheta$ und Gl. 3 mit $\psi \cdot dt$, so entsteht

$$J_2 \chi \cdot d\chi - (J_2 - J_1)\varphi \cdot \chi \cdot \psi \cdot dt = Mge \sin\vartheta \cdot d\vartheta,$$
$$J_2 \psi \cdot d\psi - (J_1 - J_2)\varphi \cdot \chi \cdot \psi \cdot dt = 0.$$

Daraus wird durch zusammenzählen:

$$J_2(\chi \cdot d\chi + \psi \cdot d\psi) = Mge \sin\vartheta \cdot d\vartheta.$$

Integrirt man dies zwischen den Grenzen

$\chi = 0$, $\psi = 0$, $\vartheta = \vartheta_0$ und

χ, ψ, ϑ, so wird

6) $$J_2(\chi^2 + \psi^2) = 2Mge(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta).$$

In Bezug auf die drei Koordinatenachsen, welche im Zeitpunkte t mit den Hauptachsen zusammenfallen (vergl. S. 212), ist die Momentensumme der Bewegungsgrössen bezw.

$$J_1 \varphi = J_1 \varphi_0; \quad J_2 \cdot \chi; \quad J_2 \cdot \psi.$$

Projiciren wir diese Strecken auf die Lothrechte AV, so ist die Summe dieser Projektionen die Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf AV. Dies giebt

$$J_1 \varphi_0 \cdot \cos\vartheta + J_2 \psi \cdot \sin\vartheta.$$

Dieser Werth muss, weil $M \cdot g \parallel AV$, d. h. das Kraftmoment in Bezug auf AV Null ist, nach S. 193 unveränderlich, also gleich seinem Anfangswerthe sein. Sonach wird

$$J_1 \varphi_0 \cos\vartheta + J_2 \psi \cdot \sin\vartheta = J_1 \varphi_0 \cos\vartheta_0, \quad \text{oder}$$

7) $$J_1 \varphi_0 (\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta) = J_2 \psi \cdot \sin\vartheta.$$

Aus den Gl. 6 und 7 lässt sich ψ entfernen und χ berechnen, nämlich

8) $$\chi = \pm \frac{1}{\sqrt{J_2}} \sqrt{(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)\left(2\,Mge - \frac{J_1{}^2 \varphi_0{}^2}{J_2} \cdot \frac{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\right)}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist ϑ die einzige Veränderliche. Da nun χ nicht imaginär werden kann, wird sich ϑ nur innerhalb solcher Werthe ändern können, für welche der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv bleibt; diejenigen Werthe von ϑ, welche jenen zu Null machen, sind Grenzwerthe. Einer dieser Grenzwerthe ist nach Gl. 8 offenbar der Anfangswerth $\vartheta = \vartheta_0$. Ein anderer Grenzwerth ϑ_1 ergiebt sich, wenn man

$$2\,M \cdot g \cdot e - \frac{J_1{}^2}{J_2} \varphi_0{}^2 \frac{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta_1}{\sin^2\vartheta_1} = 0$$

setzt, wofür man wegen $\sin^2\vartheta_1 = 1 - \cos^2\vartheta_1$ auch schreiben kann:

9) $$\frac{2\,M \cdot g \cdot e}{\varphi_0{}^2} \frac{J_2}{J_1{}^2} (1 - \cos^2\vartheta_1) = \cos\vartheta_0 - \cos\vartheta_1.$$

Der Einfachheit wegen sollen im Weiteren nur solche Fälle berücksichtigt werden, in denen die anfängliche Winkelgeschwindigkeit φ_0 sehr gross oder, bestimmter ausgedrückt, das ursprüngliche Arbeitsvermögen $\frac{J_1 \varphi_0{}^2}{2}$ sehr gross im Vergleiche mit $Mg \cdot e \frac{J_2}{J_1}$ ist; dann wird die linke Seite der Gl. 9 sehr klein, mithin auch die rechte; d. h. die Grenzwerthe ϑ_0 und ϑ_1 sind nur wenig von einander verschieden, oder ϑ ändert sich nur wenig.

Wir schreiben daher

$$\vartheta = \vartheta_0 + \delta, \tag{10}$$

worin für grosse Drehgeschwindigkeit des Kreisels δ ein kleiner Winkel ist. Hiermit wird

$$\cos\vartheta = \cos(\vartheta_0 + \delta) = \cos\vartheta_0 \cdot \cos\delta - \sin\vartheta_0 \cdot \sin\delta$$

$$= \cos\vartheta_0 - \delta \cdot \sin\vartheta_0 \quad \text{oder}$$

$$\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta = \delta \cdot \sin\vartheta_0. \tag{11}$$

Vertauscht man noch annäherungsweise $\sin\vartheta$ mit dem Anfangswerth $\sin\vartheta_0$, so wird aus Gl. 8 unter Benutzung von Gl. 11:

$$\chi = \pm \sqrt{2\frac{Mg}{J_2} \cdot e \cdot \delta \cdot \sin\vartheta_0 - \frac{J_1^{\,2}}{J_2^{\,2}} \varphi_0^{\,2} \delta^2}. \tag{12}$$

Nach Gl. 5 und 10 ist

$$\chi = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\delta}{dt}. \tag{13}$$

Der grösste Werth δ_1 von δ ergiebt sich für $\frac{d\delta}{dt} = 0$, also für $\chi = 0$ nach Gl. 12 zu

$$\delta_1 = \frac{2\,Mg \cdot e}{\varphi_0^{\,2}} \frac{J_2}{J_1^{\,2}} \sin\vartheta_0 = \vartheta_1 - \vartheta_0. \tag{14}$$

Um zu erfahren, innerhalb welcher Zeit ϑ von ϑ_0 in ϑ_1, also δ von 0 in δ_1 übergeht, muss man aus Gl. 13 und 12

$$dt = \frac{d\delta}{\chi} = \frac{d\delta}{\frac{J_1}{J_2}\varphi_0 \sqrt{\frac{2\,Mg \cdot e \cdot J_2 \cdot \sin\vartheta_0}{J_1^{\,2}\varphi_0^{\,2}}\delta - \delta^2}}$$

entnehmen und integriren. Setzt man zur Abkürzung vorübergehend

$$\frac{Mg \cdot e \cdot J_2 \cdot \sin\vartheta_0}{J_1^{\,2}\varphi_0^{\,2}} = a, \quad \text{so wird}$$

$$dt = \frac{J_2}{J_1 \cdot \varphi_0} \frac{d\delta}{\sqrt{2a\delta - \delta^2}}.$$

Nun ist aber

$$d \arccos\left(1 - \frac{\delta}{a}\right) = -\frac{d\left(1 - \frac{\delta}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\delta}{a}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{a} \frac{d\delta}{\sqrt{\frac{2\delta}{a} - \frac{\delta^2}{a^2}}} = \frac{d\delta}{\sqrt{2a\delta - \delta^2}}, \quad \text{also}$$

$$t = \frac{J_2}{J_1 \cdot \varphi_0} \arccos\left(1 - \frac{\delta}{a}\right) + C, \quad \text{oder}$$

15) $$t = \frac{J_2}{J_1 \cdot \varphi_0} \arccos\left(1 - \frac{J_1^2 \varphi_0^2}{Mg \cdot e \cdot J_2 \cdot \sin\vartheta_0} \cdot \delta\right) + C.$$

Rechnet man die Zeit von dem Augenblick an, in welchem $\delta = 0$ also $\vartheta = \vartheta_0$ war, so wird

$$0 = \frac{J_2}{J_1 \cdot \varphi_0} \arccos 1 + C, \quad \text{d. h.} \quad C = 0.$$

Löst man Gl. 15, mit $C = 0$, nach δ auf, so entsteht

16) $$\delta = \frac{Mg \cdot e \cdot J_2 \cdot \sin\vartheta_0}{J_1^2 \varphi_0^2}\left(1 - \cos\frac{J_1}{J_2}\varphi_0 \cdot t\right).$$

Diese Gleichung giebt δ als $f(t)$; jedes Mal wenn $\frac{J_1}{J_2}\varphi_0 t$ sich um 2π geändert hat, kehren für δ dieselben Werthe wieder; in der Zeit

17) $$t_1 = \frac{2\pi}{\varphi_0} \frac{J_2}{J_1}$$

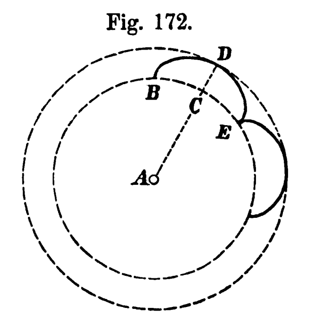
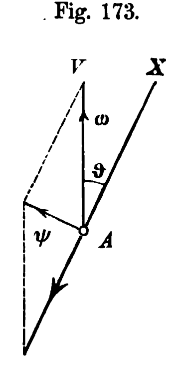


Fig. 172.

wird also der Zwischenraum von ϑ_0 bis ϑ_1 ein Mal hin und her durchlaufen. Die Achse AX des Kreisels beschreibt also um die Lothrechte AV einen Kegel mit einer nach Fig. 172 geformten Leitlinie. — Fig. 172 sei der Grundriss der Bahnlinie des Kreiselschwerpunktes S. Die Grösse des Ausschlages CD in radialer Richtung ist durch δ_1 (Gl. 14) gegeben, die Zeit zum Durchlaufen eines Bogens BDE durch Gl. 17. Um auch noch die Länge BCE eines Bogens zu finden, müssen wir die Winkelgeschwindigkeit ω berechnen, mit der sich die Ebene VAX (Fig. 171)

um AV dreht. Diese erhält man, indem man die Winkelgeschwindigkeit ψ um die Achse AZ zerlegt nach den Richtungen AV und AX (Fig. 173), dann ist die in erstere Richtung fallende Seitengeschwindigkeit der gesuchte Werth

Fig. 173.



$$\omega = \frac{\psi}{\sin\vartheta}.$$

Nun ist nach Gl. 7:

$$\psi = \frac{J_1}{J_2}\cdot\varphi_0\frac{(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)}{\sin\vartheta},$$

also mittels Gl. 11, wenn man zugleich nach S. 219 wieder $\sin\vartheta$ mit $\sin\vartheta_0$ vertauscht,

$$\psi = \frac{J_1}{J_2}\varphi_0\cdot\delta, \quad \text{mithin}$$

18) $$\omega = \frac{J_1}{J_2}\varphi_0\cdot\frac{\delta}{\sin\vartheta_0}.$$

Da nun δ von Null bis δ_1 schwankt, so ist auch ω zwischen Null und einem Grösstwerthe (für $\delta = \delta_1$) veränderlich. Einen Mittelwerth von ω erhält man, wenn man für δ den Mittelwerth

$$\frac{\delta_1}{2} = \frac{Mg\cdot e}{\varphi_0^2}\frac{J_2}{J_1^2}\sin\vartheta_0$$

(Gl. 14) einsetzt, nämlich

19) $$\omega = \frac{Mg\cdot e}{J_1\varphi_0}.$$

In der Zeit $$t_1 = \frac{2\pi}{\varphi_0}\frac{J_2}{J_1}$$

(Gl. 17) dreht sich die Ebene VAX also um den Winkel

$$\eta = \omega\cdot t_1 = 2\pi\frac{Mg\cdot e}{\varphi_0^2}\frac{J_2}{J_1^2},$$

wofür man nach Gl. 14 kürzer

20) $$\eta = \pi\frac{\delta_1}{\sin\vartheta_0}$$

schreiben kann. Auf eine Umdrehung der Ebene VAX kommen sonach

21) $$n = \frac{2\pi}{\eta} = 2\frac{\sin\vartheta_0}{\delta_1}$$

Schwankungen der Kreiselachse.

Die Zeit einer vollständigen Drehung der Ebene VAX beträgt

$$t_2 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{J_1 \cdot \varphi_0}{Mg \cdot e}, \tag{22}$$

wächst also verhältnisgleich mit der Winkelgeschwindigkeit φ_0 des Kreisels und ist unabhängig von dem Winkel ϑ_0. Bei sehr grosser Drehgeschwindigkeit φ_0 des Kreisels ist nach Gl. 14 der Winkel δ_1 nur klein, n (Gl. 21) gross und t_2 (Gl. 22) gross, d. h die Kreiselachse beschreibt sehr langsam einen Kegel mit vielen aber kleinen Rippen, so dass der Kegel fast wie ein Kreiskegel erscheint. Wird die Drehgeschwindigkeit des Kreisels um seine Achse in Folge von Reibung und Luftwiderstand allmählich kleiner, so werden die Schwankungen δ_1 grösser, bis der Kreisel schliesslich die Grundebene berührt und umfällt oder sonst in seiner Bewegung gestört wird, und die Zeit t_2 einer Drehung der Ebene VAX verkleinert sich. Der Sinn der Winkelgeschwindigkeiten ω und φ_0 (Gl. 19) stimmt in Bezug auf den Drehpunkt überein; ist φ_0, von oben betrachtet, rechts drehend, so gilt dies auch für ω, und umgekehrt.

Über die Form der Kurve BDE (Fig. 172) erhält man noch bestimmteren Aufschluss, wenn man mittels der Gl. 12 und 18 bildet

$$\frac{\chi^2}{\omega^2} = \frac{2\,Mg \cdot e \cdot \sin^3\vartheta_0 \cdot J_2}{J_1{}^2 \varphi_0{}^2 \delta} - \sin^2\vartheta_0 .$$

Für $\delta = 0$ wird $\frac{\chi^2}{\omega^2} = \infty$, d. h. die Kurve BDE ist bei B und E radial; für $\delta = \delta_1$ (Gl. 14) aber wird $\frac{\chi^2}{\omega^2} = 0$, d. h. die Kurve BDE ist bei D rechtwinklig zu AD. Weil $AC = e \cdot \sin\vartheta_0$, so ist $BCE = AC \cdot \eta = e \cdot \delta_1 \cdot \pi$ (Gl. 20). Betrachtet man annähernd CD als $= e \cdot \delta_1$, so passt auch das Verhältnis $BCE : CD = \pi$ auf eine sphärische Epicykloide, welche beim Rollen eines spitzen Kegels auf dem äusseren Mantel eines stumpferen entstehen würde.

Fig. 174.

Beispiel: Ein Kreisel (Fig. 173) bestehe aus einem Schwungringe von $0{,}045^{\mathrm{m}}$ mittlerem Halbmesser, der so schwer ist, dass gegen seine Masse diejenige der Achse und der Radarme vernachlässigt werden kann. Die Spitze liege um $0{,}02^{\mathrm{m}}$ unter der Mitte

des Schwungringes und sei in einem glatten Grübchen drehbar, so dass man ihre Bewegung als Drehung in einem Kugellager ansehen kann. Dann ist annähernd

$$J_1 = M \cdot 0{,}045^2 = 0{,}002 \cdot M,$$

$$J_2 = M\left(\frac{0{,}045^2}{2} + 0{,}02^2\right) = 0{,}0014 \cdot M,$$

$$e = 0{,}02.$$

Für diesen Kreisel ist die Schwankung

(Gl. 14) $$\delta_1 = \frac{2\,M \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}0014\,M \cdot \sin\vartheta_0}{\varphi_0{}^2 \cdot 0{,}002^2 \cdot M^2} = 137\,\frac{\sin\vartheta_0}{\varphi_0{}^2};$$

die Zeit einer Hin- und Herschwankung

(Gl. 17) $$t_1 = 2\,\pi\,\frac{0{,}0014}{0{,}002 \cdot \varphi_0} = \frac{4{,}4}{\varphi_0};$$

die Zeit eines Umlaufes der Kreiselachse um die Lothrechte

(Gl. 22) $$t_2 = 2\,\pi\,\frac{0{,}002}{9{,}81 \cdot 0{,}02}\,\varphi_0 = 0{,}064\,\varphi_0;$$

die Zahl der Schwankungen der Achse während eines Umlaufes, d. h. Zahl der Rippen des Kegels

(Gl. 21) $$n = 2\,\frac{\sin\vartheta_0}{137 \cdot \sin\vartheta_0} \cdot \varphi_0{}^2 = 0{,}015 \cdot \varphi_0{}^2.$$

Um die Achse des Kreisels sei eine Schnur gewickelt; die Mitte derselben sei von der Mittellinie der Achse um 4 mm entfernt, so dass eine Umwickelung einer Fadenlänge von rund 25 mm entspricht. Wird an dem freien Ende des Fadens mit möglichst gleich bleibender Kraft gezogen und zugleich die (hohle) Achse des Kreisels mittels eines hineingesteckten Stiftes festgehalten, so erfährt der Kreisel eine gleichförmig beschleunigte Drehbewegung. Werden bei dieser in einer Zeit von drei Sekunden 800 mm Fadenlänge abgezogen, so ist die Endgeschwindigkeit des Fadens (nach 1. Theil, S. 12, Gl. 4, mit $c = 0$)

$$v = \frac{2 \cdot 800}{3} = 533\ \mathrm{mm/s.},$$

entsprechend einer Drehgeschwindigkeit von

$$\frac{533}{25} = 21$$

Umdrehungen in der Sekunde, oder einer Winkelgeschwindigkeit

$$\varphi_0 = 21 \cdot 2\,\pi = 132.$$

Die Winkelbeschleunigung dieser Antriebbewegung ist

$$\varepsilon = \frac{\varphi_0}{t} = \frac{132}{3} = 44.$$

Hat der Kreisel ein Gewicht $Mg = 0{,}3$ kg, so ist

$$J_1 = \frac{0{,}3}{9{,}81} \cdot 0{,}002;$$

somit erfordert ε ein Moment

$$\mathfrak{M} = \varepsilon \cdot J_1 = 0{,}0027 \text{ mkg},$$

also an einem Hebelarme von $0{,}004^{\text{m}}$ eine Zugkraft $K = 0{,}7^{\text{kg}}$.

Aus $\varphi_0 = 132$ folgt die Zeit einer Hin- und Herschwankung

$$t_1 = \frac{4{,}4}{132} = 0{,}033^{\text{s.}};$$

die Zeit eines Umlaufes der Kreiselachse $t_2 = 0{,}064 \cdot 132 = 8{,}4^{\text{s.}}$; die Zahl der Rippen eines Kegels $n = 0{,}015 \cdot 132^2 = 261{,}4$. Einer Schrägstellung der Kreiselachse um den Winkel $\vartheta_0 = 10^0$ mit $\sin \vartheta_0 = 0{,}17$ entspricht dann

$$\delta_1 = \frac{137 \cdot 0{,}17}{132^2} = 0{,}0014 = 5'.$$

Ist die Winkelgeschwindigkeit φ_0 nur halb so gross, wie vorstehend angenommen, so wird t_1 doppelt so gross, d. h. $0{,}066^{\text{s.}}$; t_2 halb so gross, d. h. $4{,}2^{\text{s.}}$; die Zahl n der Rippen vermindert sich auf ein Viertel, d. h. auf $65{,}4$; während δ_1 auf das Vierfache, nämlich auf $20'$ zunimmt.

9. Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt ohne Einwirkung bewegender Kräfte.

Der vorstehend behandelte Fall der Kreiselbewegung wurde dadurch verhältnismässig leicht lösbar, dass das Trägheits-Ellipsoid ein Umdrehungs-Ellipsoid war, dass ausserdem die Winkelgeschwindigkeit φ_0 sehr gross, die anderen beiden χ_0 und ψ_0 aber gleich Null vorausgesetzt wurden und dass die Achse des resultirenden Kräftepaares in eine Hauptachse fiel. Ohne diese vereinfachenden Annahmen wird die Aufgabe, die Drehbewegung eines Körpers um einen festen Punkt zu untersuchen, meist so schwierig, dass wir von deren allgemeiner Behandlung hier absehen.

Wirken auf den Körper ausser dem Widerstande des festen Punktes keine äusseren Kräfte, sind also die Drehmomente in Bezug auf alle durch den festen Punkt zu legende Achsen gleich Null, so nehmen die Euler'schen Drehgleichungen (S. 215/6) allerdings die etwas einfachere Gestalt

$$J_1 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = (J_2 - J_3)\chi \cdot \psi, \quad J_2 \cdot \frac{d\chi}{dt} = (J_3 - J_1)\psi \cdot \varphi,$$

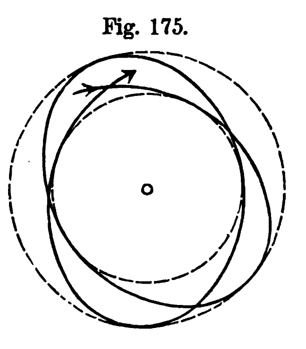
$$J_3 \cdot \frac{d\psi}{dt} = (J_1 - J_2)\varphi \cdot \chi \quad \text{an.}$$

Die Entwickelung dieser Gleichungen, welche Poinsot im Jahre 1834 gezeigt hat, soll hier nur in ihren Ergebnissen beschrieben werden.

Die Drehbewegung des Körpers um den festen Punkt A ohne Einwirkung von Kraftmomenten geschieht hiernach in der Weise, dass das auf den festen Punkt bezügliche Trägheits-Ellipsoid des Körpers eine Rollbewegung auf einer Ebene ausführt, die eine unveränderliche Lage hat. Die Lage dieser sog. unveränderlichen Ebene hängt von den anfänglichen Winkelgeschwindigkeiten φ_0, χ_0 und ψ_0 um die Hauptachsen ab. Der Fahrstrahl, von dem festen Punkt A nach dem Berührungspunkt O zwischen der Ebene und dem Ellipsoide gezogen, ist die augenblickliche Drehachse, und zugleich ist die Winkelgeschwindigkeit ω um diese Achse mit der Länge des Fahrstrahles AO verhältnisgleich. Geschieht die anfängliche Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine der Hauptachsen des Trägheits-Ellipsoides, so ist der Fahrstrahl AO rechtwinklig zu der unveränderlichen Ebene; der Berührungspunkt O hat in diesem Fall eine feste Lage im Körper und im Raume; die Drehung erfolgt daher mit gleichbleibender Geschwindigkeit dauernd um die Achse AO, als wäre diese eine feste Achse.

Die Drehung um den festen Punkt A kann nach S. 24 auch als das Rollen zweier Kegel auf einander betrachtet werden. In dem hier vorliegenden Falle, wo die Momente Null sind, schneidet der mit dem Körper verbunden gedachte Kegel das um den Punkt A gelegte Trägheits-Ellipsoid in einer Kurve, deren Gleichung Ähnlichkeit mit der Ellipsengleichung hat. Der andere, unbewegliche, Kegel ist transcendenter Natur; er hat eine etwa nach Fig. 175 geformte Leitlinie (vergl. Budde, Allgemeine Mechanik, S. 833).

Fig. 175.



Ist das Trägheits-Ellipsoid ein Umdrehungs-Ellipsoid, so werden die auf einander rollenden Kegel beide zu Kreiskegeln.

Ist das Trägheits-Ellipsoid eine Kugel, so dass jede durch A gelegte Achse eine Hauptachse ist, so gehen die Kegel in eine einzige Gerade über; die Drehachse ändert dann ihre Richtung und ihre Winkelgeschwindigkeit ω gar nicht. Dieses letzte Ergebnis folgt auch schon aus 1. Theil, S. 290.

10. Bewegung eines freien Körpers.

Das vorstehend über die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt Mitgetheilte findet auch sinngemässe Anwendung auf die Bewegung eines freien Körpers. Vereinigt man nämlich die an einem starren Körper von der Masse M wirkenden äusseren Kräfte zu einer durch den Schwerpunkt S des Körpers gehenden Einzelkraft R und einem Achsenmoment $\mathfrak{M}$, so wird die Bewegung des Schwerpunktes S nach S. 170 nur durch die Kraft R beeinflusst; diese ertheilt dem Körper eine Verschiebungs-Beschleunigung

$$p = \frac{R}{M}$$

im Sinne der Kraft R. Ausser der Verschiebung mit dem Schwerpunkte führt der Körper im Allgemeinen noch eine Drehung um den Schwerpunkt aus, welche nach 1. Theil, S. 297 unabhängig von der Verschiebung so behandelt werden kann, als wäre der Schwerpunkt ein fester Punkt und als drehe sich der Körper um ihn unter Einwirkung des Moments $\mathfrak{M}$. Für diese Drehung gilt daher das S. 211 bis S. 224 Gesagte. Erfolgt die Bewegung unter alleiniger Einwirkung der Schwere, so beschreibt der Schwerpunkt die bekannte (1. Theil, S. 49) Wurfparabel, und die Drehung um den Schwerpunkt erfolgt ohne Einwirkung von Momenten, also nach S. 224 und 225 (vergl. auch 1. Theil, S. 297). Wirft man z. B. einen geraden Stab (eine materielle gerade Linie) mit der Hand derartig fort, dass der Stab ausser der Geschwindigkeit c des Schwerpunktes noch eine Winkelgeschwindigkeit ω in einer durch die Mittellinie des Stabes gehenden Ebene, also um eine rechtwinklig zu dieser Mittellinie stehende Achse, bekommt (Fig. 176), so wird, wenn man vom Luftwiderstand absieht, die Geschwindigkeit c die parabolische Wurfbewegung des Schwerpunktes bedingen, die Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω daneben aber unverändert erhalten bleiben. Steht die Achse der Winkelgeschwindigkeit ω aber schief gegen den Stab, so wird die Drehung um den Schwerpunkt eine veränderliche, wirbelnde Bewegung sein.

Fig. 176.

11. Schwingungen eines Schiffes.

Die lothrecht auf und nieder gehende Bewegung, das sog. Tauchen oder Steigen eines Schiffes wurde bereits S. 62/63 behandelt. Die Dauer einer einfachen Schwingung dieser Art ergab sich zu

$$1)\qquad t_1 = \pi \sqrt{\frac{V}{F \cdot g}},$$

entsprechend der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels von der Länge

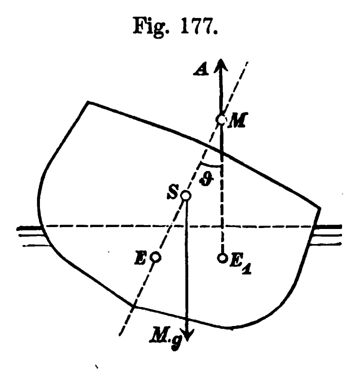
$$2)\qquad l = \frac{V}{F} = t_1{}^2 \frac{g}{\pi^2} = 0{,}994\, t_1{}^2,$$

wenn V den Inhalt des eingetauchten Raumes im Gleichgewichtszustand, F den Inhalt der wagerechten Schwimmfläche bedeuten.

Von besonderer Wichtigkeit ist das Rollen des Schiffes, worunter man eine Drehung um die zum Kiele parallele Schwerpunktsachse (Längsachse) versteht.

Ein aufrecht (gerade) schwimmendes Schiff werde durch vorübergehende Einwirkung eines Kräftepaares derartig in eine schräge Lage gebracht, dass die Querschnitte in ihrer ursprünglichen Ebene verbleiben, und stehe dann wieder unter alleiniger Wirkung des Gewichtes Mg und des ebenso grossen Auftriebes $A = \gamma \cdot V = Mg$, worin γ das Gewicht einer Raumeinheit des Wassers. Das Schiff sei von solcher Gestalt, dass auch die Richtungslinie des Auftriebes sich nur in der durch den Schwerpunkt S des Schiffes gelegten Querschnitts-Ebene verschoben hat. Dann fällt die durch den Schwerpunkt S gelegte Achse des wirkenden Kräftepaares (Mg und A) mit der Längsachse des Schiffes zusammen, welche annähernd als eine freie Achse angesehen werden möge.

Fig. 177.



Die Entfernung aus der Gleichgewichtslage werde als nur gering, der Neigungswinkel ϑ (Fig. 177) als klein vorausgesetzt, dann schneidet nach 2. Theil, S. 191, der Auftrieb des Schiffes die

Schwimmachse ES desselben in einem festen Punkte, dem **Metacentrum** M, welches vom Schwerpunkt S um die **metacentrische Höhe** SM entfernt ist. Liegt der Schwerpunkt E des eingetauchten Raumes oder der **Verdrängung** V bei aufrechter Lage des Schiffes um

$$ES = e$$

unterhalb des Schwerpunktes S des Schiffes, so ist (2. Theil, S. 191, Gl. 5 u. 6)

$$SM = \frac{\mathfrak{J}}{V} - e \tag{3}$$

und das aufrichtende Moment

$$\mathfrak{M} = \gamma \cdot V\left(\frac{\mathfrak{J}}{V} - e\right)\vartheta, \tag{4}$$

worin $\mathfrak{J}$ das Trägheitsmoment der Schwimmfläche (Fig. 178), in Bezug auf ihre Längsachse OX bedeutet.

Fig. 178.

Bei der Rückkehr in die Gleichungslage verkleinert sich der Winkel ϑ, es ist daher die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung

$$\omega = -\frac{d\vartheta}{dt},$$

die Winkelbeschleunigung

$$\varepsilon = -\frac{d^2\vartheta}{dt^2}.$$

Bezeichnet man nun mit J das Trägheitsmoment des Schiffes in Bezug auf die Längsachse S, so ist (1. Theil, S. 276)

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{\mathfrak{M}}{J} = -\frac{\gamma \cdot V}{J}\left(\frac{\mathfrak{J}}{V} - e\right)\vartheta, \quad \text{oder}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -k^2 \cdot \vartheta, \tag{5}$$

wenn man zur Abkürzung

$$k^2 = \gamma\frac{\mathfrak{J} - e \cdot V}{J} \tag{6}$$

setzt. Nach S. 92/93 hat Gl. 5 die allgemeine Lösung

$$\vartheta = A \sin kt + B \cos kt.$$

Eine Zunahme von kt um 2π führt das Schiff in den vorhergehenden Zustand zurück, daher entspricht die Zeit $\frac{2\pi}{k}$ einer Doppelschwingung; die Dauer einer einfachen Schwingung ist also

7) $$t_1 = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{J}{\gamma(\mathfrak{J} - e \cdot V)}},$$

und dies entspricht einer Schwingungslänge, die sich analog Gl. 2 ergiebt zu

8) $$l_1 = \frac{J \cdot g}{\gamma(\mathfrak{J} - e \cdot V)} = \frac{J}{M \cdot \overline{SM}} = \frac{i^2}{\overline{SM}},$$

wenn i der Trägheitshalbmesser.

Eine Schwingung um die Querachse des Schiffes wird das Stampfen genannt. Für die Dauer desselben gilt

9) $$t_2 = \pi \sqrt{\frac{J_2}{\gamma(\mathfrak{J}_2 - e \cdot V)}},$$

wenn J_2 das Trägheitsmoment des Schiffes in Bezug auf die Querachse, $\mathfrak{J}_2$ das Trägheitsmoment der Schwimmfläche in Bezug auf die Querachse bezeichnen.

Beispiel: Ein Schiff von $a = 120^{\text{m}}$ Länge, $b = 12^{\text{m}}$ Breite, $c = 8{,}5^{\text{m}}$ Höhe wiege 5845^{t}, dann ist im Seewasser ($\gamma = 1025^{\text{kg}}$)

$$V = \frac{5845}{1{,}025} = 5702^{\text{cbm}}.$$

Die Schwimmfläche betrage $F = 0{,}82\, a \cdot b = 0{,}82 \cdot 120 \cdot 12 = 1181^{\text{qm}}$, dann ist die Schwingungslänge des Tauchens (Gl. 2)

$$l = \frac{V}{F} = \frac{5702}{1181} = 4{,}83^{\text{m}}$$

und die entsprechende Dauer einer einfachen Schwingung (1. Theil, S. 78)

$$\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 1{,}003 \sqrt{l} = 2{,}2^{\text{s}}.$$

Das geometrische Trägheitsmoment $\mathfrak{J}$ der Schwimmfläche wird auf das Trägheitsmoment des umschliessenden Rechtecks $(a \cdot b)$ zurückgeführt und möge wegen der Zuschärfung 60 % desselben betragen; dann ist

$$\mathfrak{J} = 0{,}68 \cdot \frac{a b^3}{12} = \frac{0{,}68 \cdot 120 \cdot 12^3}{12} = 11\,750^{\text{m}^4}.$$

Die Höhe des Schiffsschwerpunktes S über dem Schwerpunkt E der Verdrängung betrage $e = 1{,}46^{\text{m}}$, dann wird die metacentrische Höhe

$$\overline{SM} = \frac{\mathfrak{J}}{V} - e = \frac{11\,750}{5702} - 1{,}46 = 0{,}6^{\text{m}}.$$

Für das Trägheitsmoment J des beladenen Schiffes giebt es keine Annäherungsformeln; vielmehr muss man zu dessen unmittelbarer Bestimmung die

Masse eines jeden Theiles des Schiffes mit dem Quadrate seines Abstandes von der Schwerpunktsachse multipliciren und diese Produkte summiren. Gewöhnlich unterlässt man diese mühsame Rechnung, beobachtet vielmehr die Schwingungsdauer t_1, berechnet daraus die Schwingungslänge l_1 und schliesslich nach Gl. 8 das Trägheitsmoment J.

Das vorliegende Schiff gebrauche zu einer einfachen Roll-Schwingung $t_1 = 8^{s.}$; dem entspricht eine Schwingungslänge

$$l_1 = \frac{t_1^2}{1{,}003^2} = \frac{64}{1{,}003^2} = 63{,}62^{\,m}.$$

Hiermit wird nach Gl. 8

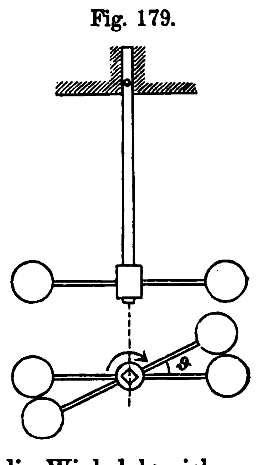
$$i^2 = l_1 \cdot \overline{SM} = 63{,}62 \cdot 0{,}6 = 38{,}17 \quad \text{und} \quad i = 6{,}18^{\,m}. \quad \text{Schliesslich}$$

$$J = Mi^2 = \frac{5845 \cdot 1000}{g} \cdot 38{,}17 = 22\,743\,000\,.$$

12. Drehungspendel.

Ein elastischer, prismatischer Stab oder Draht sei an seinem oberen Ende fest eingespannt, auch gegen Drehung gesichert; an seinem unteren Ende sei ein Körper von solcher Massenvertheilung befestigt, dass die lothrechte Mittellinie des Stabes eine freie Achse des Körpers bilde (Fig. 179). Zu Anfang befinde sich das Ganze im Gleichgewichte. Wird nun der untere Körper um die lothrechte Achse gedreht, so entstehen in dem mitverdrehten Stabe Schubspannungen, die innerhalb der Elasticitätsgrenze mit dem Drehungswinkel verhältnisgleich sich ändern. Wird der Körper sodann losgelassen, so ertheilt das Spannungsmoment des Stabes dem Körper eine Winkelbeschleunigung, welche demnach verhältnisgleich ist der Winkelabweichung von der Gleichgewichtslage. Wird die Winkelabweichung für einen beliebigen Zeitpunkt mit ϑ bezeichnet, so ist, weil die Bewegung eine rückläufige, die Winkelgeschwindigkeit $\omega = -\frac{d\vartheta}{dt}$, die Winkelbeschleunigung

Fig. 179.



$$1) \qquad \varepsilon = -\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{\mathfrak{M}}{J},$$

wenn $\mathfrak{M}$ das mit ϑ verhältnisgleiche Verdrehungs-, J das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die lothrechte Achse bezeichnen. Die einfache Gl. 1 für ε ist hier verwendbar, weil nur Winkelbeschleunigungen und Drehungen um eine freie Achse in Frage kommen, so dass (nach 1. Theil, S. 297) die Bewegung wie eine Drehung um eine feste lothrechte Achse geschehen muss.

Für Gl. 1 kann man schreiben:

2) $$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -k^2\cdot\vartheta; \quad \text{dann bedeutet}$$

3) $$k^2 = \frac{\mathfrak{M}}{J\vartheta}$$

die Winkelbeschleunigung für einen Verdrehungswinkel $\vartheta = 1 = 57{,}3^0$. Da Gl. 2 mit Gl. 5, S. 228 übereinstimmt, so ist sie die Differentialgleichung einer Schwingungsbewegung um die Gleichgewichtslage als Mitte, und die Dauer einer einfachen Schwingung ist nach Gl. 7, S. 229

4) $$t_1 = \frac{\pi}{k}.$$

Hat der Stab oder Draht den Halbmesser r und die freie Länge h, so ist bei einer stärksten Schubspannung τ nach 2. Theil, S. 65

$$\mathfrak{M} = \tau\cdot\frac{r^3\pi}{2} \quad \text{und zugleich} \quad \tau = \frac{G\cdot r\cdot\vartheta}{h},$$

wenn G das Gleitmafs des Stoffes, also

$$\mathfrak{M} = G\frac{r^4\pi}{2h}\vartheta \quad \text{und nach Gl. 3}$$

5) $$k^2 = G\frac{r^4\pi}{2h\cdot J}.$$

Beispiel: Der Draht habe $r = 0{,}1^{\,\text{cm}}$ Halbmesser und $h = 100^{\,\text{cm}}$ Länge Am unteren Ende sei ein Schwungring von $2^{\,\text{kg}}$ Gewicht und $30^{\,\text{cm}}$ mittlerem Halbmesser befestigt. Dann ist, weil bei der Rechnung mit Centimetern $g = 981$ gesetzt werden muss, $J = \frac{2\cdot 30^2}{981}$ und mit $G = 800\,000^{\,\text{at}}$,

$$k^2 = \frac{800\,000\cdot 0{,}1^4\pi\cdot 981}{2\cdot 100\cdot 2\cdot 30^2} = 0{,}685;$$

$$k = 0{,}828; \quad t_1 = \frac{\pi}{0{,}828} = 3{,}8^{\,\text{s.}}.$$

Kennt man Stärke und Gleitmaſs des Drahtes nicht genau genug, so kann k^2 auch durch einen Verdrehungsversuch ermittelt werden. Ist R der Halbmesser des Schwungringes und setzt man $J = \mu R^2$, so ist $\mu \cdot g$ annähernd das Gewicht des Ringes. Bringt man nun mit Hülfe zweier Rollen und zweier Gewichtstücke $= {}^1/_2\,\mu g$ an dem Ringe zwei wagerechte Kräfte $= {}^1/_2\,\mu g$ so an, dass sie auf die lothrechte Achse ein Kräftepaar vom Momente

$$ {}^1/_2\,\mu g \cdot 2R = \mu g \cdot R $$

übertragen, so wird nach Gl. 3

$$ 6)\qquad k^2 = \frac{\mu g \cdot R}{\mu \cdot R^2 \vartheta} = \frac{g}{R\vartheta}. $$

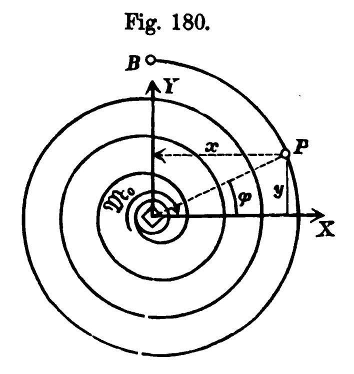
Misst man sodann an dem Ringe die durch das Kräftepaar erzeugte Verdrehung $R\vartheta = s$ im Abstande R von der Mitte, so ist

$$ 7)\qquad k^2 = \frac{g}{s} \quad \text{und} \quad t_1 = \pi \sqrt{\frac{s}{g}}, $$

d. h. gleich der Dauer einer kleinen Schwingung eines Pendels von der Schwingungslänge s.

Die Gleichungen 1—4, 6 und 7 gelten auch für die Schwingungen der sog. Unruhe einer Uhr. Die mit der Achse des Schwungrädchens verbundene Spiralfeder setzt der Verdrehung des Rades aus der Gleichgewichtslage ein Spannungsmoment entgegen, welches sich mit dem Verdrehungswinkel annähernd verhältnisgleich ändert.

Fig. 180.



Die Spiralfeder (Fig. 180) sei am äusseren Ende bei B eingespannt; in der Mitte, wo sich die Drehachse des Schwungrädchens befindet, werde auf das innere Ende der Feder eine in X und Y zerlegte Einzelkraft und ein Kräftepaar $\mathfrak{M}_0$ übertragen. Dann ist an einem Punkte P mit den Koordinaten x und y das Biegungsmoment

$$ 8)\qquad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 - Xy + Yx. $$

Wird das Schwungrädchen aus der dem spannungslosen Zustande der Feder entsprechenden Lage um den Winkel ϑ gedreht, wobei es auf die Feder das Moment $\mathfrak{M}_0$ und die Kräfte X und Y ausübt, so ist ϑ der gesammte Verbiegungswinkel der Feder von der Mitte bis zum Endpunkte B. Für diesen gilt nach Keck, Elasticitätslehre, S. 227, Gl. 4:

$$ 9)\qquad EJ_1\vartheta = \int_0^a \mathfrak{M} \cdot ds = \mathfrak{M}_0 a - X\int_0^a y \cdot ds + Y\int_0^a x \cdot ds, $$

wenn a die Gesammtlänge der Feder bezeichnet. Da nun der Schwerpunkt der ganzen Spirale von der Länge a bei vielen Windungen derselben nahezu im Anfangspunkte der Koordinaten liegt, so sind

$$\int_0^a y \cdot ds \quad \text{und} \quad \int_0^a x \cdot ds$$

annähernd Null, und es ist

10)
$$\mathfrak{M}_0 = \frac{EJ_1}{a}\vartheta,$$

wenn J_1 das Trägheitsmoment des Querschnittes der Feder bedeutet. Somit wird

11)
$$k^2 = \frac{EJ_1}{aJ} \quad \text{(Gl. 3)}$$

an Stelle von Gl. 5 treten, wobei J das Trägheitsmoment der Unruhe bedeutet, und die entsprechende Pendellänge

12)
$$l = \frac{g}{k^2} = g\frac{J}{EJ_1}a,$$

ist mit der Federlänge a verhältnisgleich.

Es sei der Querschnitt der Feder $0{,}5 \cdot 0{,}04^{\text{mm}}$, das Trägheitsmoment also

$$J_1 = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}04^3}{12} = \frac{8}{3} \cdot 10^{-6}\,\text{mm}^4,$$

die Länge der Feder $a = 200^{\text{mm}}$; das Gewicht des Schwungrädchens $\mu g = 0{,}000\,25^{\text{kg}}$, sein Halbmesser 8^{mm}, sein Trägheitsmoment, bezogen auf Kilogramm und Millimeter, $J = \frac{0{,}016}{g}$, $E = 25\,000^{\text{kg}}/_{\text{qmm}}$, somit

$$l = \frac{0{,}016 \cdot 200}{25000 \cdot \frac{8}{3} 10^{-6}} = 48^{\text{mm}}$$

und die Dauer einer einfachen Schwingung

$$t_1 = 1{,}003\sqrt{0{,}048} = 0{,}22 \text{ Sekunden.}$$

13. Umfallende, auf dem Boden reibungslos ausgleitende Stange.

Eine Stange von der Länge a und dem Gewichte $M \cdot g$, die anfänglich lothrecht auf wagerechtem Boden stand (Fig. 181), falle nach rechts um; dann wird, wenn das untere Ende A der Stange nicht festgehalten ist, auch an demselben keine Reibung auftritt, der Boden nur einen lothrechten Normalwiderstand N auf die Stange übertragen. Der im Abstand e vom unteren Ende befindliche Schwerpunkt S der Stange wird sich, weil nur lothrechte Kräfte wirken, lothrecht abwärts bewegen, so dass, wenn die Stange auf dem Boden anlangt (Fig. 182), das untere Ende um $A_0 A_1 = e$

nach links geglitten sein wird. Es sollen die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten in beliebiger Zwischenlage und beim Aufschlagen berechnet werden.

In der beliebigen Zwischenlage (Fig. 183), wo die Mittellinie der Stange mit der Lothrechten den Winkel ϑ bildet, sei p die

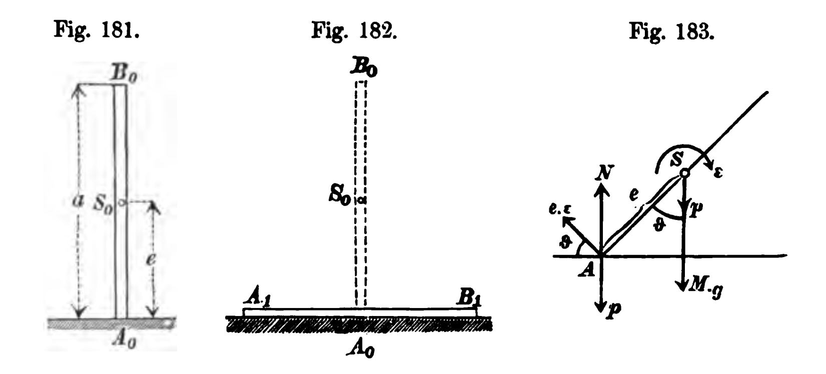


Fig. 181. Fig. 182. Fig. 183.

lothrecht gerichtete Beschleunigung des Schwerpunktes, ε die Winkelbeschleunigung um die rechtwinklig zur Bildebene gedachte Schwerpunktsachse, welche als freie Achse angenommen wird. Dann ist nach dem Satze von der Beschleunigung des Schwerpunktes

1) $$p = \frac{Mg - N}{M} \quad \text{und}$$

2) $$\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J} = \frac{N \cdot e \cdot \sin\vartheta}{J} \quad \text{(s. S. 204, Gl. 1)},$$

wenn $J = M \cdot i^2$ das Trägheitsmoment in Bezug auf die bezeichnete Schwerpunktsachse bedeutet.

Das untere Ende der Stange hat die lothrechte Beschleunigung p, die Umfangsbeschleunigung $e \cdot \varepsilon$. Da seine Gesammtbeschleunigung aber nur wagerecht sein kann, so muss p durch $e \cdot \varepsilon \cdot \sin\vartheta$ aufgehoben werden, mithin

3) $$\varepsilon = \frac{p}{e \cdot \sin\vartheta}$$

sein. Aus Gl. 2 und 3 ergiebt sich

$$N = \frac{p \cdot J}{e^2 \sin^2\vartheta}.$$

Hiermit bestimmt sich aus Gl. 1:

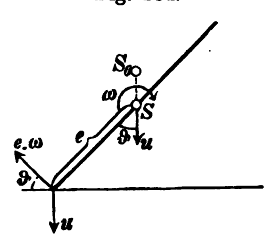
$$4)\qquad p = \frac{g}{1 + \frac{i^2}{e^2 \cdot \sin^2 \vartheta}},$$

$$5)\qquad \text{ferner}\quad \varepsilon = \frac{g}{e \cdot \sin \vartheta + \frac{i^2}{e \cdot \sin \vartheta}} \quad \text{und}$$

$$6)\qquad N = \frac{Mg}{1 + \frac{e^2 \sin^2 \vartheta}{i^2}}.$$

Aus diesen Gleichungen kann man die Beschleunigung jedes Punktes der Stange berechnen; diejenige des unteren Endes beträgt nach Fig. 183: $e \cdot \varepsilon \cdot \cos \vartheta$.

Fig. 184.



Die Geschwindigkeiten lassen sich am einfachsten nach dem Satze der Arbeit berechnen. In der beliebigen Zwischenlage (Fig. 184) sei u die Geschwindigkeit des Schwerpunktes (lothrecht gerichtet), ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um den Schwerpunkt. Dann ist das Arbeitsvermögen $\frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$ nach 1. Theil, S. 296. Die Arbeit der Schwerkraft ist $Mg \cdot \overline{SS_0}$; es wird daher, weil $\overline{SS_0} = e(1 - \cos \vartheta)$, wenn man zugleich noch $J = M \cdot i^2$ setzt,

$$\frac{Mu^2}{2} + \frac{M \cdot i^2}{2} \omega^2 = Mg \cdot e(1 - \cos \vartheta),$$

oder weil, entsprechend Gl. 3, $\omega = \frac{u}{e \cdot \sin \vartheta}$ ist,

$$7)\qquad u^2 = \frac{2g \cdot e(1 - \cos \vartheta)}{1 + \frac{i^2}{e^2 \cdot \sin^2 \vartheta}} \quad \text{und}$$

$$8)\qquad \omega^2 = \frac{2g \cdot e(1 - \cos \vartheta)}{e^2 \cdot \sin^2 \vartheta + i^2}.$$

Für die Geschwindigkeit w des unteren Endes gilt $w = e \cdot \omega \cos \vartheta$, also

$$9)\qquad w^2 = \frac{2g \cdot e(1 - \cos \vartheta)}{tg^2 \vartheta + \frac{i^2}{e^2 \cos^2 \vartheta}}.$$

Für die Anfangsstellung, d. h. $\vartheta = 0$, $\sin\vartheta = 0$, $\cos\vartheta = 1$, geben diese Gleichungen selbstverständlich

$$p = 0; \quad \varepsilon = 0; \quad N = Mg; \quad u = 0; \quad \omega = 0; \quad w = 0.$$

Für die Endlage, d. h. $\vartheta = 90^0$, $\sin\vartheta = 1$, $\cos\vartheta = 0$, wird

$$p = \frac{g}{1 + \frac{i^2}{e^2}}; \quad \varepsilon = \frac{g}{e + \frac{i^2}{e}}; \quad N = \frac{Mg}{1 + \frac{e^2}{i^2}}; \quad u^2 = \frac{2g \cdot e}{1 + \frac{i^2}{e^2}};$$

$$\omega^2 = \frac{2g \cdot e}{e^2 + i^2}; \quad w^2 = 0;$$

und, wenn v die Geschwindigkeit des anderen Endes,

$$v = u + (a - e)\omega, \quad \text{also}$$

$$v = a\sqrt{\frac{2g \cdot e}{e^2 + i^2}}.$$

d. h. $v = a \cdot \omega$, wie es wegen $w = 0$ auch sein muss.

Da in der Endlage $w = 0$ ist, so stimmt beim Aufschlagen der Stange ihr Geschwindigkeitszustand mit dem einer unten drehbar befestigten (S. 209) überein, nicht aber der Beschleunigungs- und Kräftezustand. Bei der Vergleichung dieser Formeln mit denen auf S. 209—211 ist zu bedenken, dass i^2, bezogen auf den unteren Endpunkt (S. 209), gleichbedeutend ist mit $i^2 + e^2$ in den Formeln der S. 234—236.

Für eine materielle Gerade, d. h. einen Stab mit gleichmässig über seine Länge vertheilter Masse, also $e = {}^1/_2\, a$; $i^2 = {}^1/_{12}\, a^2$; $\frac{i^2}{e^2} = \frac{1}{3}$ wird in der Endlage

$$p = \frac{3}{4}g; \quad \varepsilon = \frac{3}{2}\frac{g}{a}; \quad N = \frac{1}{4}Mg; \quad u^2 = \frac{3}{4}g \cdot a; \quad \omega^2 = \frac{3g}{a};$$

$$w^2 = 0; \quad v^2 = 3g \cdot a.$$

Hieraus folgt, wie es wegen $w = 0$ sein muss, $v = 2u$.

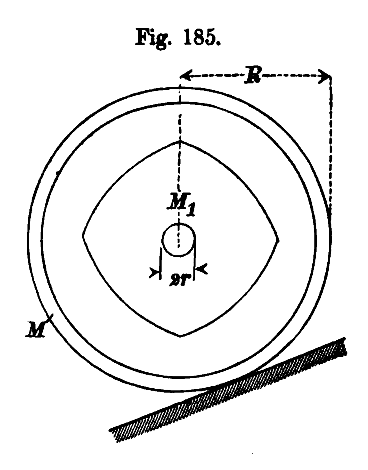
14. Rollbewegung auf schiefer Ebene.

Auf einer schiefen Ebene von der Neigung α rolle ein Umdrehungskörper von der Masse M (Fig. 185), dem Rollkreishalbmesser R und einem auf die Drehachse bezogenen Trägheitsmoment $J = \mu R^2$; er trage mittels einer Achse vom Durchmesser $d = 2r$ einen Körper von der Masse M_1 und dem auf dieselbe

Achse bezogenen Trägheitsmoment $J_1 = \mu_1 R^2$, Die Drehachse sei für beide Massen M und M_1 eine freie Achse. An der Tragachse der Masse M_1 möge Reibung auftreten.

Zu Anfang seien beide Massen in Ruhe. Auf schiefer Ebene erfährt nun die Masse M eine abwärts gerichtete beschleunigte Rollbewegung. Die Beschleunigung des Schwerpunktes sei p, dann muss die Winkelbeschleunigung der Drehung um die Achse (nach 1. Theil, S. 300) betragen

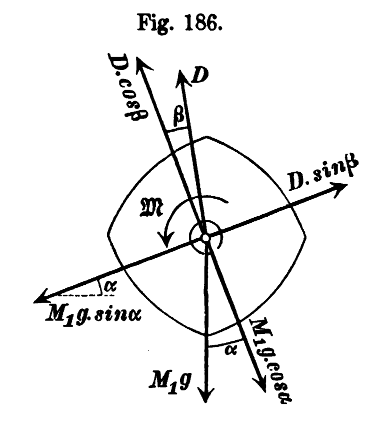
Fig. 185.



$$\varepsilon = \frac{p}{R}.$$

Die Masse M_1 muss nun die Verschiebung mit der Beschleunigung p vollständig mitmachen; eine Drehbeschleunigung ε_1 wird ihr nur durch das Moment der Zapfenreibung mitgetheilt, u. zw. tritt dieses Reibungsmoment in verschiedener Grösse auf, je nachdem die Winkelgeschwindigkeit ω_1 der Masse M_1 kleiner ist als diejenige der Masse M, oder den gleichen Werth hat. Im ersteren Falle kommt die volle Zapfenreibung zur Wirkung, im anderen Falle nur ein Theil derselben. Da nun beide Massen zu Anfang die Geschwindigkeit Null hatten und gleichförmig beschleunigte Bewegungen ausführen, so ist das Verhältnis von ω_1 zu ω gleich mit demjenigen von ε_1 zu ε.

Fig. 186.



Erster Fall, geringe Zapfenreibung: Die Zapfenreibung sei so gering, dass sie nicht im Stande ist, der Masse M_1 dieselbe Winkelbeschleunigung ε zu ertheilen, welche die Masse M erleidet. Dann tritt an den Zapfen ein Gleiten auf, und somit ein volles Reibungsmoment $D \cdot f \cdot r$, worin D der Zapfendruck, f die Reibungsziffer.

Der Zapfendruck D stimmt mit dem Gewicht $M_1 g$ nach Grösse und Richtung nicht ganz überein. Seine Richtung weiche von der Rechtwinkligen zur schiefen Ebene um den Winkel β ab (s. 1. Theil, S. 302). Zerlegt man die auf M_1 wirkenden Kräfte $M_1 g$ und D nach den Richtungen parallel zur schiefen Ebene und rechtwinklig dazu, so ergiebt sich (Fig. 186) in ersterer Richtung eine schräg abwärts gerichtete Gesammtkraft $M_1 g \sin\alpha - D \sin\beta$, und es muss, weil diese der Masse M_1 die Beschleunigung p ertheilt,

$$M_1 p = M_1 g \sin\alpha - D \sin\beta, \quad \text{oder}$$

1) $$D \cdot \sin\beta = M_1 g \sin\alpha - M_1 p$$

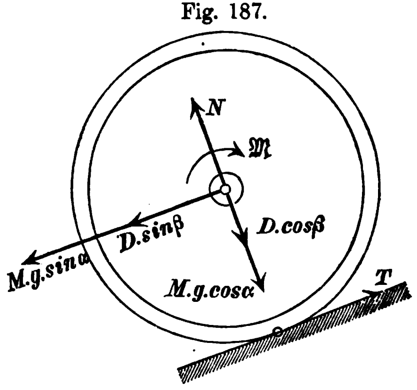
sein, während in der zweiten Richtung

2) $$D \cdot \cos\beta = M_1 g \cos\alpha \quad \text{wird.}$$

Das in Fig. 186 links herum drehende Reibungsmoment $\mathfrak{M} = D \cdot f \cdot r$ ertheilt der Masse M_1 eine Winkelbeschleunigung

3) $$\varepsilon_1 = \frac{D \cdot f \cdot r}{J_1} = \frac{D \cdot f \cdot r}{\mu_1 R^2}.$$

Fig. 187.



An der rollenden Masse M wirken die Schwere Mg, der Zapfendruck D, das Zapfenreibungsmoment $\mathfrak{M}$ im Sinne rechts herum und die an der Rollbahn auftretende Normal- und Tangentialkraft N und T; Figur 187 zeigt diese Kräfte nach zweckmässiger Zerlegung. Dann gilt für die Beschleunigung des Schwerpunktes

$$Mp = Mg \cdot \sin\alpha + D \cdot \sin\beta - T,$$

oder wegen Gl. 1:

4) $$Mp = Mg \cdot \sin\alpha + M_1 g \cdot \sin\alpha - M_1 p - T.$$

Da nun bei der Rollbewegung die Umfangsbeschleunigung der Drehung $\varepsilon \cdot R$ gleich der Beschleunigung p des Schwerpunktes sein muss, so wird (vergl. 1. Theil, S. 303)

5) $$\mu \cdot p = T - \frac{D \cdot f \cdot r}{R}.$$

Setzt man den hieraus folgenden Werth von T in obige Gleichung ein, so entsteht:

$$6)\qquad (M + M_1 + \mu)p = (M + M_1)g \cdot \sin\alpha - Df\frac{r}{R},$$

worin mit genügender Annäherung $D = M_1 g$ gesetzt werden kann. Diese Gleichung gilt, so lange an der Achse ein Gleiten stattfindet, so lange also $\varepsilon > \varepsilon_1$, oder $pR > R^2\varepsilon$, d. h.

$$7)\qquad \frac{(M + M_1)g \cdot \sin\alpha \cdot R - M_1 g \cdot f \cdot r}{M + M_1 + \mu} > \frac{M_1 g \cdot f \cdot r}{\mu_1}$$

ist. — Für reibungslose Lagerung ($f = 0$) ist Bedingung 7 erfüllt, daher Gleichung 6 gültig, mit $f = 0$.

Zweiter Fall; grössere Zapfenreibung, die das Gleiten an dem Zapfen verhindert. Ist die Bedingung 7 nicht erfüllt, ist vielmehr die Zapfenreibung genügend gross, um die Masse M_1 vollständig an der Drehung von M theilnehmen zu lassen, so wird $\varepsilon = \varepsilon_1$, und es tritt das Reibungsmoment $\mathfrak{M}$ nur in derjenigen Grösse auf, welche nöthig ist, der Masse M_1 die Winkelbeschleunigung $\varepsilon_1 = \varepsilon$ zu ertheilen, d. h., da wieder $\varepsilon \cdot R = p$,

$$8)\qquad \mathfrak{M} = \varepsilon \cdot J_1 = \varepsilon \cdot \mu_1 \cdot R^2 = p \cdot \mu_1 R.$$

Die Gleichungen 1 und 2 bleiben gültig, ebenso Gl. 4; an Stelle von Gl. 5 aber tritt die folgende:

$$\mu \cdot p = T - \frac{\mathfrak{M}}{R} = T - \mu_1 \cdot p;$$

dies giebt $T = (\mu + \mu_1)p$, und hiermit wird aus Gl. 4:

$$9)\qquad (M + M_1 + \mu + \mu_1)p = (M + M_1)g \cdot \sin\alpha.$$

Diese Gleichung gilt auch für solche Fälle, in denen M und M_1 gegen einander unbeweglich sind, so dass man sie wie einen einzigen Körper auffassen kann.

Beispiel: Rollbewegung eines mit Wasser gefüllten Gefässes. Der rollende Körper sei ein dünnwandiges cylindrisches Gefäss von der Masse M und der auf den Umfang bezogenen Masse μ; er sei mit Wasser gefüllt von der Masse M_1 und der auf den Umfang bezogenen Masse μ_1. Betrachten wir das Wasser als vollkommen flüssig, d. h. ohne Fähigkeit, Reibungswiderstände auszuüben, so wird es beim Abwärtsrollen des Gefässes nur an der Verschiebungsbeschleunigung p, nicht aber an der Drehung theilnehmen. Es gilt daher Gl. 6 mit $f = 0$, d. h.

$$10)\qquad (M + M_1 + \mu)p = (M + M_1)g \cdot \sin\alpha.$$

Ist das Wasser aber durch radiale Wandungen an der relativen Drehung gegen das Gefäss verhindert, oder etwa zu Eis erstarrt und an dem Gefässe festgefroren, so muss es an der Drehung theilnehmen, und es gilt nun Gl. 9, welche für p einen kleineren Werth ergiebt als Gl. 10.

Werden zwei im Äusseren übereinstimmende Gefässe der ersten und der zweiten Art auf eine schiefe Ebene neben einander gesetzt und losgelassen, so wird das erste Gefäss schneller laufen als das zweite.

Ist das Gefäss so dünnwandig, dass man seine Massen M und μ gegen die des Wassers M_1 und μ_1 vernachlässigen kann, so wird im ersten Falle

$$p = g \sin \alpha, \tag{11}$$

im anderen Falle mit $\mu_1 = {}^1/_2\, M_1$:

$$p = \frac{2}{3} g \sin \alpha. \tag{12}$$

Man würde daher durch einen Rollversuch feststellen können, ob die Wasserfüllung sich gegen das Gefäss frei drehen kann oder nicht.

15. Anhalten eines Eisenbahnzuges durch Bremsung.

Die beschleunigte oder verzögerte Bewegung der Fuhrwerke wurde schon im 1. Theile, S. 302, jedoch ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand, behandelt. Bei schnell fahrenden Eisenbahnzügen ist aber, wie schon im 1. Theile, S. 256, gesagt wurde, der Luftwiderstand so erheblich, dass er die übrigen Widerstände übersteigt. Daher soll an dieser Stelle der besonders wichtige Fall des Anhaltens eines Eisenbahnzuges mit Rücksicht auf den Luftwiderstand als Ergänzung des früher gegebenen behandelt werden.

Die Untersuchung bezieht sich auf einen einzelnen Wagen (Fig. 187); wie dieselbe dann auf einen ganzen Zug angewandt werden kann, soll im Beispiele gezeigt werden.

Wie schon im 1. Theile, S. 302 erläutert, müssen bei einem beschleunigten Fuhrwerke drei Massen von einander unterschieden werden:

1. die Masse M der rollenden Theile, d. h. der Achsen und Räder;
2. die auf den Halbmesser R des Rollkreises bezogene Masse μ der rollenden Theile;
3. die Masse M_1 der übrigen Theile des Fuhrwerks, welche nur an der Verschiebung, nicht an der Drehung, theilnehmen.

Ist v die Geschwindigkeit des Zuges, F seine Querschnittsfläche, γ das Gewicht von 1 cbm Luft, so kann der Luftwiderstand nach 2. Theil, S. 353, Gl. 4

$$1)\qquad W = \frac{\gamma}{g} F \cdot v^2$$

gesetzt werden. Unter Hinzufügung dieser Kraft W wird aus Gl. 9, 1. Theil, S. 303:

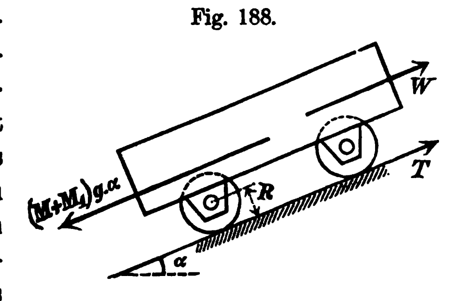
$$Mp = Mg \sin\alpha + M_1 g \sin\alpha - M_1 p - T - W,$$

wenn p die abwärts gerichtete Beschleunigung des Wagens bedeutet; oder, wenn man für schwache Gefälle $\sin\alpha$ mit α vertauscht (Fig. 188):

$$2)\qquad (M + M_1)p = (M + M_1)g \cdot \alpha - T - W.$$

Für die Umfangsbeschleunigung p der Drehung der Räder ist die zwischen Rad und Schiene auftretende Reibung T die beschleunigende Kraft mit dem Momente $T \cdot R$. Als Widerstandsmomente wirken demselben entgegen: 1. das Zapfenreibungsmoment, welches mit genügender Genauigkeit aus einem Zapfendrucke $M_1 g$ zu $M_1 g \cdot f \cdot r$ abgeleitet werden kann (wenn r der Zapfenhalbmesser); 2. das Moment des

Fig. 188.



Rollwiderstandes, welches, ebenfalls annähernd, mit $(M + M_1)g \cdot e$ eingeführt werden darf (wenn e der Arm des Rollwiderstandes, s. 1. Theil, S. 248); 3. das Moment der Bremsreibung $P \cdot f_1 \cdot R$, wenn P die Summe der Bremsdrücke, f_1 die Reibungsziffer der Bremsklötze bedeuten. Hiernach wird

$$\mu \cdot p \cdot R = T \cdot R - M_1 g \cdot f \cdot r - (M + M_1)g \cdot e - P \cdot f_1 R$$

und somit

$$T = \mu p + M_1 g \cdot f \cdot \frac{r}{R} + (M + M_1)g \cdot \frac{e}{R} + P \cdot f_1.$$

Nennt man aber α_0 das Gleichgewichtsgefälle für sehr langsame Bewegung ohne Wirkung von Zugkraft, Bremskraft und

Luftwiderstand, so kann für die Summe vom Zapfenreibungs- und Rollwiderstand nach 1. Theil, S. 304 abgekürzt gesetzt werden:

$$M_1 g \cdot f \cdot \frac{r}{R} + (M + M_1) g \cdot \frac{e}{R} = (M + M_1) g \cdot \alpha_0 ,$$

womit
$$T = \mu p + (M + M_1) g \cdot \alpha_0 + P \cdot f_1$$
wird. Führt man dies in Gl. 2 ein, so entsteht

$$3)\qquad p = \frac{(M + M_1) g (\alpha - \alpha_0) - P \cdot f_1 - \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot v^2}{M + M_1 + \mu} .$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$4)\qquad \frac{(M + M_1) g (\alpha - \alpha_0) - P \cdot f_1}{M + M_1 + \mu} = - A ,$$

$$5)\qquad \frac{\gamma}{g} \frac{F}{M + M_1 + \mu} = B ,$$

so wird
$$p = - A - B \cdot v^2 = - (A + B \cdot v^2) , \quad \text{oder}$$

$$6)\qquad \frac{dv}{dt} = - (A + B \cdot v^2) .$$

Hieraus folgt

$$dt = - \frac{dv}{A + Bv^2} = - \frac{1}{A} \frac{dv}{1 + \frac{B}{A} \cdot v^2} , \quad \text{oder}$$

$$dt = - \frac{1}{\sqrt{A \cdot B}} \frac{d\left(v \sqrt{\frac{B}{A}}\right)}{1 + \frac{B}{A} \cdot v^2} .$$

Somit ergiebt sich durch Integration

$$t = - \frac{1}{\sqrt{A \cdot B}} \operatorname{arc\,tg} v \sqrt{\frac{B}{A}} + C .$$

War für $t = 0$ die Geschwindigkeit $v = c$ und soll sie für $t = t_1$ zu Null geworden sein, so ist die zum Anhalten des Zuges erforderliche Zeit t_1 leicht bestimmt zu

$$7)\qquad t_1 = \frac{1}{\sqrt{A \cdot B}} \operatorname{arc\,tg} c \sqrt{\frac{B}{A}} .$$

Um die zum Anhalten erforderliche **Wegeslänge** a zu erhalten, multiplicire man Gl. 6 mit

$$2\,v \cdot dt = 2\,dx;$$

dann wird
$$\frac{2\,v \cdot dv}{A + B \cdot v^2} = -\,2 \cdot dx,$$

$$\frac{2\,B \cdot v \cdot dv}{A + B \cdot v^2} = -\,2\,B \cdot dx, \quad \text{also}$$

$$\mathfrak{l}(A + B \cdot v^2) = -\,2\,B \cdot x + C_1.$$

Mit $v = c$ für $x = 0$ wird $C_1 = \mathfrak{l}(A + Bc^2)$, also

$$8) \qquad \mathfrak{l}\,\frac{A + B \cdot c^2}{A + B \cdot v^2} = 2\,B \cdot x;$$

die Bremsstrecke $x = a$ folgt für $v = 0$ zu

$$9) \qquad a = \frac{1}{2\,B}\,\mathfrak{l}\left(1 + \frac{B}{A}\,c^2\right), \quad \text{oder}$$

$$10) \qquad a = \frac{2{,}3026}{2\,B}\log\left(1 + \frac{B}{A}\,c^2\right).$$

Das **Gleichgewichtsgefälle** α_1 **mit Rücksicht auf den Luftwiderstand** ergiebt sich für eine Geschwindigkeit c, indem man in Gl. 3 einführt:

$$p = 0 \quad \text{und} \quad P = 0.$$

Dann wird

$$11) \qquad \alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\gamma}{g}\,\frac{F \cdot c^2}{(M + M_1)\,g}.$$

Beispiel: Ein Schnellzug, bestehend aus Lokomotive, Tender, Gepäckwagen, Postwagen und fünf Personenwagen, fahre mit einer Geschwindigkeit $c = 20\,{}^{m}/_{s.} = 72\,{}^{km}/_{h.}$; es soll die zum Anhalten erforderliche Bremszeit t_1 und Bremsstrecke a berechnet werden, u. zw. auf wagerechter Strecke $(\alpha = 0)$ und auf einem Gefälle $\alpha = 1 : 200$.

Die Lokomotive wiege 42^t, der Tender 20^t, der übrige Zug 105^t, der ganze Zug also $(M + M_1)\,g = 167^t$. Das auf den Rollkreis bezogene Gewicht der Achsen und Räder, d. h. nahezu das Gewicht der sämmtlichen Radreifen betrage $\mu g = 14^t$. Die Summe aller Bremsdrücke sei etwa gleich dem halben Gewichte des Zuges, nämlich rund $P = 84^t$, die Reibungsziffer der Bremsklötze $f_1 = {}^1/_7$. Dann wird nach Gl. 4:

$$A = \frac{84 \cdot {}^1/_7 - 167\,(\alpha - \alpha_0)}{167 + 14} \cdot 9{,}81,$$

oder, wenn man (nach 1. Theil, S. 255) $\alpha_0 = 0{,}0025$ annimmt,

$$12) \qquad A = 0{,}673 - 9{,}05\,\alpha.$$

Bei mittlerem Barometerstande und bei 0° C. wiegt 1 cbm Luft 1,29 kg, bei einer mittleren Temperatur von 10° C. daher (nach 2. Theil, S. 211)

$$\gamma = 1{,}29 \cdot \frac{273}{283} = 1{,}24 \text{ kg}.$$

Der Luftwiderstand ist nun aber bei einem längeren Zuge nicht allein von der Querschnittsfläche abhängig, sondern auch von der Länge des Zuges, weil mit letzterer der Reibungswiderstand der Luft wächst, der ebenfalls in W nach Gl. 1 enthalten sein muss. Nach Versuchen vom Geh. Reg.-Rath Alb. Frank (Hannover) liefert eine Lokomotive mit Tender zu F den Beitrag 7 qm, der dann folgende Gepäckwagen 1,7 qm, jeder folgende Post- oder Personenwagen 0,5 qm. Also ist hier zu schreiben:

$$F = 7 + 1{,}7 + 6 \cdot 0{,}5 = 11{,}7 \text{ qm}.$$

Hiermit wird nach Gl. 5:

$$B = 1{,}24 \cdot \frac{11{,}7}{181\,000} = 0{,}000\,080\,2. \tag{13}$$

Die zum Anhalten auf wagerechter Bahn erforderliche Zeit wird nach Gl. 7:

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{0{,}673 \cdot 0{,}000\,080\,2}} \operatorname{arc\,tg} 20 \sqrt{\frac{0{,}000\,080\,2}{0{,}673}},$$

$$t_1 = 136{,}11 \cdot \operatorname{arc\,tg} 0{,}2183 = 136{,}11 \cdot \operatorname{arc}(12^0\,19') = 136{,}11 \cdot 0{,}215 = 29{,}3 \text{ sek}. \tag{14}$$

Die Bremsstrecke aber wird nach Gl. 9:

$$a = \frac{2{,}3026}{2 \cdot 0{,}000\,080\,2} \log\left(1 + \frac{0{,}000\,080\,2}{0{,}673} \cdot 20^2\right) = 290{,}8 \text{ m}. \tag{15}$$

Für $\alpha = {}^1/_{200} = 0{,}005$ ist nach Gl. 11

$$A = 0{,}673 - 0{,}045 = 0{,}628,$$

$$B \text{ wie vorstehend} = 0{,}000\,080\,2, \quad \text{somit}$$

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{0{,}628 \cdot 0{,}000\,080\,2}} \operatorname{arc\,tg} 20 \sqrt{\frac{0{,}000\,080\,2}{0{,}628}}$$

$$t_1 = 31{,}3 \text{ sek}.$$

$$a = \frac{2{,}3026}{0{,}000\,160\,4} \log\left(1 + \frac{0{,}000\,080\,2 \cdot 400}{0{,}628}\right) = 310{,}7 \text{ m}. \tag{17}$$

Das Gleichgewichtsgefälle für diesen Zug mit $c = 20$ ist nach Gl. 11:

$$\alpha_1 = 0{,}0025 + \frac{1{,}24}{9{,}81} \, \frac{11{,}7 \cdot 400}{167\,000},$$

$$\alpha_1 = 0{,}0025 + 0{,}0035 = 0{,}006 = \frac{1}{167}. \tag{18}$$

Will man Bremszeit t_1 und Bremsstrecke a unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes berechnen, so hat man B mit Null zu vertauschen. Hiermit nehmen nun die Gleichungen 7 und 9 die scheinbar unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Man kann diese Unbestimmtheit in bekannter Weise durch Differentiation beseitigen, kann aber auch durch einfache Überlegung das Ergebnis finden

In Gl. 7 wird nämlich bei sehr kleinem B auch der Unterschied zwischen dem Bogen und seiner Tangente sehr klein, so dass man dann (wie S. 82)

$$\operatorname{arc\,tg} c\sqrt{\frac{B}{A}} = c\sqrt{\frac{B}{A}}$$

setzen kann; hiermit verwandelt sich Gl. 7 in das einfache

$$t_1 = \frac{c}{A}. \tag{19}$$

In Gl. 7 kann, weil bei kleinem x $\mathfrak{l}(1+x) = x$ wird, bei kleinem B

$$\mathfrak{l}\left(1 + \frac{B}{A}c^2\right) = \frac{B}{A}c^2$$

gesetzt werden, womit dann Gl. 9 die einfache Form

$$a = \frac{c^2}{2A} \quad \text{annimmt.} \tag{20}$$

Da übrigens für $B = 0$ die Verzögerung nach Gl. 6 einfach $= A$ wird, so folgt $t_1 = \frac{c}{A}$ auch einfach aus dem Begriffe der Verzögerung und

$$a = \frac{ct_1}{2} = \frac{c^2}{2A}$$

aus der Grundeigenschaft der gleichförmig veränderten Bewegung.

Für wagerechte Bahn mit $A = 0{,}673$ (Gl. 12) und $c = 20\,\text{m/s.}$ wird

$$t_1 = \frac{20}{0{,}673} = 29{,}7\,\text{s.}; \quad a = 297{,}2\,\text{m}.$$

Für $\alpha = {}^1/_{300}$ mit $A = 0{,}628$ wird

$$t_1 = \frac{20}{0{,}628} = 31{,}8\,\text{s.}; \quad a = 318{,}5\,\text{m}.$$

Diese Zahlen weichen von den mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes erhaltenen nur so wenig ab, dass es zulässig ist, bei der Berechnung der Bremswirkung den Luftwiderstand zu vernachlässigen. Beim Bremsen genügt schon eine geringe Vermehrung des Bremsdruckes P oder der Reibungsziffer f_1, welche beide niemals ganz scharf zu bestimmen sind, um die Vernachlässigung des Luftwiderstandes auszugleichen.

Für die Ermittelung der erforderlichen Zugkraft hat der Luftwiderstand bei grosser Geschwindigkeit dagegen erheblichen Einfluss, insofern nach Gl. 18 bei dem angenommenen Zuge das Gleichgewichtsgefälle α_1, welches gleichbedeutend ist mit dem Verhältnisse der auf wagerechter Bahn erforderlichen Zugkraft zu dem Gewichte des Eisenbahnzuges, durch den Luftwiderstand von $0{,}0025$ auf $0{,}006$ vergrössert wird.

Auch für den Antrieb des **Fahrrades** spielt der Luftwiderstand eine nicht unbedeutende Rolle. Ist c die Geschwindigkeit des Radfahrers, so kann das Gleichgewichtsgefälle des besetzten Rades in Übereinstimmung mit Gl. 11, S. 243

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\gamma}{g}\,\frac{Fc^2}{(M + M_1)g}$$

gesetzt werden. Darin bezieht sich α_0 auf den Einfluss der Reibungswiderstände an den Achsen, Kettengelenken u. dergl., sowie des Rollwiderstandes

am Boden, das zweite Glied auf den Luftwiderstand. Zugleich bedeutet α_0 das Gefälle, auf dem das Rad mit sehr geringer Geschwindigkeit c ohne Kraftaufwand läuft. Die Reibungswiderstände sind an einem gut gearbeiteten und gut unterhaltenen Rade sehr gering; nicht unerheblich aber ist der Rollwiderstand auch auf guter Fahrstrasse, weil das Eindrücken des Luftreifen bei der Berührung mit dem Boden Quetschungen verursacht, die, wie schon im 1. Theile, S. 251 erläutert wurde, Gleitungen und daher Reibungswiderstände zur Folge haben. Eingehende Versuche darüber fehlen noch. Einstweilen möchten wir nach Angaben des Herrn Landes-Bauinspektors Gloystein in Celle für gute Strasse und gutes Rad $\alpha_0 = 0{,}007$ schätzen. Die Widerstandsfläche F, welche der Radfahrer der Luft darbietet, kann man unter günstigen Umständen zu $0{,}5^{\text{qm}}$ annehmen. Mit $\gamma = 1{,}24^{\text{kg}/\text{cbm}}$ Luftgewicht ergiebt sich dann der Luftwiderstand zu

$$\frac{\gamma}{g} F \cdot c^2 = \frac{1{,}24}{9{,}81} \cdot 0{,}5 \cdot c^2 = 0{,}063 \cdot c^2$$

in Kilogrammen, wenn c in $^{\text{m}}/_{\text{s}}$. ausgedrückt ist. Bei einem Gesammtgewichte des besetzten Rades $(M + M_1) g = 90^{\text{kg}}$ würde hiernach das Gleichgewichtsgefälle

$$\alpha_1 = 0{,}007 + \frac{0{,}063}{90} c^2 = 0{,}007 \left(1 + \frac{c^2}{10}\right),$$

also bei

$$c = 4{,}5^{\text{m}}/_{\text{s}}. \ (= 16{,}2^{\text{km}}/_{\text{h}}.)$$

$$\alpha_1 = 0{,}007 \left(1 + \frac{4{,}5^2}{10}\right) = 0{,}021 = \frac{1}{47} \quad \text{werden.}$$

Daher ist auf wagerechter Bahn zur gleichmässigen Bewegung des Rades eine parallel zur Bahn wirkend gedachte Zugkraft

$$K = (M + M_1) g \cdot \alpha_1 = 90 \cdot 0{,}021 = 1{,}89^{\text{kg}}$$

und eine sekundliche Arbeit

$$E = K \cdot c = 1{,}89 \cdot 4{,}5 = 8{,}51^{\text{mkg}}/_{\text{s}}. \quad \text{erforderlich.}$$

Ist die Kettenübersetzung so eingerichtet, dass bei der Geschwindigkeit von $4{,}5^{\text{m}}/_{\text{s}}$. die Kurbelachse in der Sekunde eine Umdrehung macht und beträgt der Kurbelhalbmesser $0{,}17^{\text{m}}$, der Hub der Füfse also $0{,}34^{\text{m}}$, so ist die mittlere Druckkraft des Fufses auf die Tretkurbel

$$P = \frac{8{,}51}{0{,}34} = 25^{\text{kg}}.$$

16. Elastische Schwingungen eines Eisenbahnwagens.

Von den Schwingungs-Bewegungen eines Eisenbahnwagens treten besonders hervor: die lothrechte Verschiebung, das **Wogen**, und die Drehschwingung um die wagerechte Querachse durch den

Schwerpunkt, das Nicken. Ist die der Gleichgewichts-Belastung entsprechende Durchbiegung der Tragfedern f, so ist nach S. 61 diese Länge zugleich die Schwingungslänge l des Wogens und die Dauer einer einfachen Schwingung

$$1)\qquad t_1 = \pi\sqrt{\frac{f}{g}}.$$

Fig. 189.

Fig. 190.

Die Bewegung des Nickens werde an einem von vier Federn getragenen Fuhrwerk entwickelt. Fig. 189 stelle dasselbe im Gleichgewichtszustande dar. Wird der Wagen um einen kleinen Winkel ϑ um die Querachse S gedreht, so wird (Fig. 190) das linksseitige Federpaar um $c - y_1$ stärker, das rechtsseitige um $y_2 - c$ weniger stark zusammengedrückt als im Gleichgewichtszustande. Die Federdrücke gehen in Folge dessen aus den Werthen $\frac{1}{2} Mg$ über in P_1 und P_2, wobei

$$\frac{P_1 - \frac{1}{2} M\cdot g}{\frac{1}{2} Mg} = \frac{c - y_1}{f} \quad \text{also}$$

$$2)\qquad P_1 = \frac{Mg}{2}\left(1 + \frac{c - y_1}{f}\right) \quad \text{und ebenso}$$

$$3)\qquad P_2 = \frac{Mg}{2}\left(1 - \frac{y_2 - c}{f}\right) \quad \text{ist.}$$

Der Hebelarm von P_1 in Bezug auf S ist nach Fig. 190:

$$a\cos\vartheta - e\sin\vartheta,$$

der von P_2:

$$a\cos\vartheta + e\sin\vartheta.$$

Daher entsteht ein der Vergrösserung des Drehungswinkels ϑ entgegen wirkendes Moment

$$\mathfrak{M} = P_1(a \cdot \cos\vartheta - e \cdot \sin\vartheta) - P_2(a \cdot \cos\vartheta + e \cdot \sin\vartheta)$$
$$= (P_1 - P_2)a \cdot \cos\vartheta - (P_1 + P_2)e \cdot \sin\vartheta.$$

Nach Gl. 2 und 3 ist nun

$$P_1 - P_2 = \frac{Mg}{2}\frac{y_2 - y_1}{f};$$
$$P_1 + P_2 = Mg + \frac{Mg}{2}\frac{2c - (y_2 + y_1)}{f}.$$

Fig. 189 und 190 liefern die geometrischen Beziehungen

$$e + c = y_1 + a \cdot \sin\vartheta + e \cdot \cos\vartheta \quad \text{und}$$
$$e + c = y_2 - a \cdot \sin\vartheta + e \cdot \cos\vartheta,$$

woraus man erhält

$$y_2 - y_1 = 2a \cdot \sin\vartheta, \quad y_2 + y_1 = 2c + 2e(1 - \cos\vartheta).$$

Da der Winkel ϑ meist klein bleibt, so möge $\sin\vartheta = \vartheta$ und $\cos\vartheta = 1$ gesetzt werden. Hiermit wird dann

$$P_1 - P_2 = \frac{Mg}{2}\frac{2a \cdot \vartheta}{f}, \quad P_1 + P_2 = Mg \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{M} = Mg\left(\frac{a^2}{f} - e\right)\vartheta.$$

Dieses erzeugt eine Winkelbeschleunigung (analog S. 231)

$$4) \qquad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{\mathfrak{M}}{J} = -k^2\vartheta, \quad \text{wenn}$$
$$k^2 = \frac{Mg}{J}\left(\frac{a^2}{f} - e\right) \quad \text{und} \quad J = M \cdot i^2$$

das Trägheitsmoment des Wagens in Bezug auf die Querachse S bedeutet, womit man auch schreiben kann

$$5) \qquad k^2 = \frac{g}{i^2}\left(\frac{a^2}{f} - e\right).$$

Gl. 4 ist wieder (s. S. 231) die Differentialgleichung einer Schwingungsbewegung von der Schwingungslänge

$$6) \qquad l = \frac{g}{k^2} = \frac{i^2}{\frac{a^2}{f} - e}.$$

Für einen **dreiachsigen** Wagen, dessen Endachsen den Abstand a von der Mittelachse haben, bleibt letztere von der Schwingung ziemlich unberührt. Unter der Voraussetzung, dass im Gleichgewichtszustande sämmtliche Federn gleich stark belastet sind, wird dann

$$P_1 - P_2 = \frac{2}{3} Mg \frac{a \cdot \vartheta}{f}; \quad P_1 + P_2 = \frac{2}{3} Mg;$$

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{3} Mg \left(\frac{a^2}{f} - e\right) \vartheta;$$

7) $$k^2 = \frac{2}{3} \frac{g}{i^2} \left(\frac{a^2}{f} - e\right) \quad \text{und}$$

8) $$l = \frac{3}{2} \frac{i^2}{\frac{a^2}{f} - e}.$$

Beispiel: Nach überschlägiger Berechnung ist für einen dreiachsigen Personenwagen mit $a = 3{,}15^{\mathrm{m}}$ gefunden $e = 1{,}15^{\mathrm{m}}$; $i^2 = 9{,}03^{\mathrm{qm}}$. Es kann bei mittlerer Belastung die Gleichgewichts-Durchbiegung der Federn $f = 0{,}16^{\mathrm{m}}$ angenommen werden. Hiermit ergiebt sich

$$l = \frac{3}{2} \frac{9{,}03}{\frac{9{,}92}{0{,}16} - 1{,}15} = \frac{13{,}55}{62 - 1{,}15} = 0{,}22^{\mathrm{m}}.$$

Da das zweite Glied im Nenner gegen das erste sehr unerheblich ist, so kann man es wohl vernachlässigen und erhält dann ebenfalls $0{,}22^{\mathrm{m}}$. Mit Rücksicht auf dieses Ergebnis kann man statt Gl. 8 kürzer schreiben:

9) $$l = \frac{3}{2} f \frac{i^2}{a^2},$$

oder, wenn man die auf den Abstand a bezogene Masse μ mit

$$J = M \cdot i^2 = \mu \cdot a^2 \quad \text{also} \quad \frac{i^2}{a^2} = \frac{\mu}{M} \quad \text{einführt,}$$

10) $$l = \frac{3}{2} \frac{\mu}{M} f.$$

Bei dem hier in Frage stehenden Personenwagen ergiebt sich

$$\frac{3}{2} \frac{\mu}{M} \quad \text{zu} \quad 1{,}37, \qquad \text{daher}$$

11) $$l = 1{,}38 \cdot f = 1{,}37 \cdot 0{,}16 = 0{,}22^{\mathrm{m}}.$$

Die einfache Schwingungsdauer des Wogens ist (Gl. 1) $t_1 = 0{,}4^{\mathrm{s.}}$, mit $2^1/_2$ einfachen oder $1^1/_4$ Doppelschwingungen in der Sekunde; diejenige des Nickens $t_2 = 0{,}47^{\mathrm{s.}}$, mit 2,13 einfachen oder 1,06 Doppelschwingungen in der Sekunde. Bei etwa 9^{m} Schienenlänge und 20^{m} sekundlicher Geschwindigkeit erfolgen

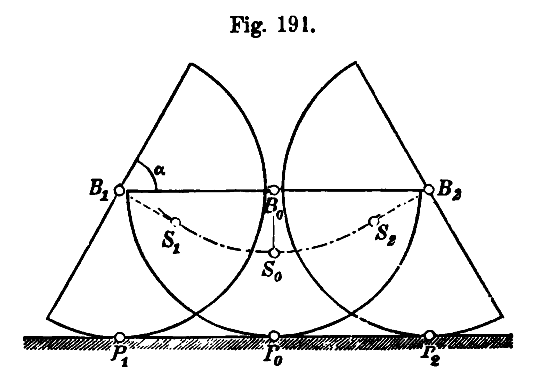
die Stösse an den Schienenlücken, welche die wesentlichste Ursache der Schwingungen darstellen in Zeiträumen von 0,45 s. Dies Verhältnis ist ein günstiges, weil jeder zweite Stoss die Einwirkung des ersten auf das Nicken ziemlich wieder aufhebt.

17. Wälzendes oder wiegendes Pendel.

a) Auf ebener Fläche.

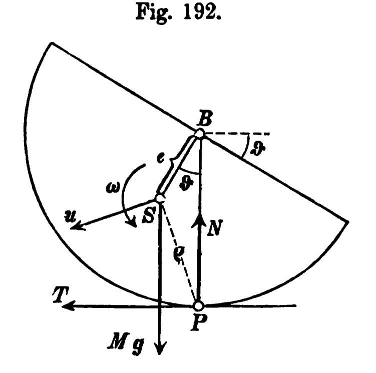
Nach 1. Theil, S. 149 ist ein gleichförmiger Kugel- oder Cylinder-Abschnitt, der mit der gekrümmten Fläche sich auf eine wagerechte Ebene stützt, in gesichertem Gleichgewichte. Wird er aus der Gleichgewichtslage gebracht, so führt er unter Einwirkung der Schwere Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus; setzt man nun die Berührungsflächen als genügend rauh voraus, dass ein Gleiten an denselben verhütet wird, so entsteht eine Roll- oder Wälzbewegung, und man nennt solche Vorrichtung (Fig. 191) ein wälzendes oder wiegendes Pendel; auch die Kinderwiege gehört zu diesen.

Fig. 191.



In der Mittellage befindet sich der Schwerpunkt S_0 lothrecht unter dem Mittelpunkte B_0 des Rollkreises und zugleich in seiner tiefsten Lage. Beim Wiegen beschreibt der Schwerpunkt einen Theil einer verkürzten Cykloide $S_1 S_0 S_2$. Die grösste Abweichung von der Mittellage werde durch den Winkel α gemessen.

Fig. 192.



Um die Dauer einer einfachen Schwingung $S_1 S_0 S_2$ zu ermitteln, betrachten wir den Körper in einer Zwischenlage, (Fig. 192), die

von der Gleichgewichtslage um den beliebigen Winkel ϑ abweicht. Die Wälzbewegung besteht aus einer Verschiebung des Schwerpunktes S mit der Geschwindigkeit u und einer gleichzeitigen Drehung um die rechtwinklig zur Bildebene stehende Schwerpunktsachse S mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Dann ist das augenblickliche Arbeitsvermögen des Körpers nach S. 185 $\frac{Mu^2}{2} + \frac{J}{2}\omega^2$, worin J das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die genannte Schwerpunktsachse S bedeutet. Es wirken auf den Körper die äusseren Kräfte Mg (durch den Schwerpunkt) und die Widerstände N und T der Berührungsstelle. Die letzteren beiden verrichten bei der Wälzung keine Arbeit, weil ihr Angriffspunkt P die Geschwindigkeit Null hat. Zur Arbeitsverrichtung kommt daher nur die Schwerkraft in Frage. Der Schwerpunkt S liegt um $\overline{SB} \cdot \cos\vartheta = e \cdot \cos\vartheta$ unterhalb des Punktes B, also, da B stets in gleicher Höhe verbleibt, um $e(\cos\vartheta - \cos\alpha)$ unter seiner Höchstlage. Weil nun in letzterer die Geschwindigkeiten u und ω Null waren, so ist nach dem Satze der Arbeit

$$1) \qquad \frac{M \cdot u^2}{2} + \frac{J \cdot \omega^2}{2} = Mg \cdot e(\cos\vartheta - \cos\alpha).$$

Für die in der Bildfläche erfolgende ebene Bewegung bildet der Berührungspunkt P den Augenblicks-Drehpunkt, sonach muss $u = \omega \cdot \overline{PS} = \omega \cdot \varrho$ und auch rechtwinklig zu PS sein. Führt man dies in Gl. 1 ein und ausserdem $J = M \cdot i^2$, so wird

$$2) \qquad \frac{M\omega^2}{2} \cdot \varrho^2 + \frac{M\omega^2}{2} \cdot i^2 = Mg \cdot e(\cos\vartheta - \cos\alpha).$$

Bezeichnet man aber mit r den Halbmesser PB des Rollkreises, so ist in dem Dreieck PSB

$$\varrho^2 = e^2 + r^2 - 2e \cdot r \cdot \cos\vartheta;$$

fügt man rechts noch $+ 2e \cdot r$ und $- 2e \cdot r$ hinzu, so kann auch geschrieben werden

$$\varrho^2 = (r - e)^2 + 2er(1 - \cos\vartheta).$$

Hiermit wird aus Gl. 2:

$$3) \qquad \omega = \sqrt{\frac{2g \cdot e(\cos\vartheta - \cos\alpha)}{(r - e)^2 + 2e \cdot r(1 - \cos\vartheta) + i^2}}.$$

Weil nun ϑ der bis zur Mittellage noch zurückzulegende Drehungswinkel ist, der sich bei der jetzt betrachteten Bewegung verkleinert,

so ist $$\omega = -\frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{und}$$

4) $$dt = -d\vartheta \sqrt{\frac{(r-e)^2 + i^2 + 2e \cdot r(1-\cos\vartheta)}{2g \cdot e(\cos\vartheta - \cos\alpha)}}.$$

Die Integration dieser Gleichung wird nur unter Annahme kleiner Schwingungswinkel α einfach; alsdann kann man $2e \cdot r(1-\cos\vartheta)$ gegen die übrigen Glieder des Zählers vernachlässigen; führt man nun noch zur Abkürzung

5) $$\frac{(r-e)^2 + i^2}{e} = l$$

ein, so ergiebt sich

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\alpha)}}.$$

Weil diese Gleichung mit der entsprechenden Gleichung für das mathematische Pendel von der Länge l (1. Theil, S. 77) übereinstimmt, so hat das wälzende Pendel unter Voraussetzung kleiner Schwingungswinkel gleiche Schwingungsdauer mit einem mathematischen Pendel von der Länge l nach Gl. 5, nämlich

6) $$t_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Würde der Körper sich als gewöhnliches physisches Pendel um die Achse B drehen, so wäre nach 1. Theil, S. 279, Gl. 5 die Schwingungslänge

7) $$l_1 = \frac{J_B}{Me} = \frac{J_S + Me^2}{Me} = \frac{i^2 + e^2}{e}.$$

Es ist also

8) $$l \gtreqless l_1, \quad \text{wenn} \quad (r-e)^2 \gtreqless e^2.$$

Für den wiegenden Halbcylinder ist (nach 1. Theil, S. 132)

$$e = \frac{4}{3\pi} r = 0{,}424\, r.$$

In Bezug auf die Achse B ist das Trägheitsmoment (nach 1. Theil, S. 272)

$$J_B = \frac{Mr^2}{2},$$

daher $J_S = J_B - M \cdot e^2 = M\left(\frac{r^2}{2} - 0{,}424^2 \cdot r^2\right)$ und

$$i^2 = \frac{J_S}{M} = 0{,}320\, r^2.$$

Hiernach wird die Schwingungslänge der halbcylindrischen Wiege (Gl. 5)

$$9)\qquad l = r\frac{(1 - 0{,}424)^2 + 0{,}320}{0{,}424} = 1{,}537\, r,$$

während für den an der Achse B aufgehängten Halbcylinder die Schwingungslänge

$$10)\qquad l_1 = \frac{J_B}{M \cdot e} = \frac{\frac{r^2}{2}}{0{,}424\, r} = 1{,}179\, r$$

wird. Es ist also thatsächlich $l > l_1$, weil $(r - e)^2 = 0{,}332\, r^2$, e^2 aber nur $= 0{,}180\, r^2$.

Für die wiegende Halbkugel ist (nach 1. Theil, S. 136 u. 273)

$$e = {}^3/_8\, r; \quad J_B = 0{,}4\, M \cdot r^2; \quad J_S = M(0{,}4 - {}^9/_{64})\, r^2;$$

$i^2 = 0{,}259\, r^2$. Daher

$$11)\qquad l = r\frac{(1 - {}^3/_8)^2 + 0{,}259}{{}^3/_8} = 1{,}732\, r;$$

während für die an der Achse B aufgehängte Halbkugel die Schwingungslänge

$$12)\qquad l_1 = \frac{J_B}{M \cdot e} = \frac{0{,}4}{{}^3/_8} r = 1{,}067\, r$$

wird. Es ist also wieder $l > l_1$.

Für eine wiegende dünne Halbkugelschale ergiebt sich das Trägheitsmoment J_B leicht aus dem des Halbkugelkörpers. Für letzteren ist

$$J_B = 0{,}4\, Mr^2 = 0{,}4 \cdot {}^2/_3\, r^5 \pi = {}^4/_{15}\, r^5 \pi;$$

ändert sich r um dr, so ist die Zunahme von J_B das Trägheitsmoment einer Halbkugelschale von der Wandstärke dr, nämlich ${}^4/_3\, r^4 \pi \cdot dr$; lässt man hierin den Faktor dr fort, so ergiebt sich ${}^4/_3\, r^4 \pi$ als Trägheitsmoment einer Halbkugelfläche, und weil deren Grösse $2 r^2 \pi$ beträgt, so wird für dieselbe

$$J_B = M \cdot \frac{4}{3}\,\frac{r^4 \pi}{2 r^2 \pi} = \frac{2}{3} M \cdot r^2.$$

Da nun (nach 1. Theil, S. 135 und 150) $e = \frac{r}{2}$, so gilt für die Schwerpunktsachse

$$i^2 = \frac{2}{3} r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{5}{12} r^2, \quad \text{daher}$$

13) $$l = r \frac{(1 - 0{,}5)^2 + {}^5/_{12}}{0{,}5} = \frac{4}{3} r;$$

für die an der Achse B hängende Kugelschale aber wird nach Gl. 7

14) $$l_1 = \frac{{}^2/_3 r^2}{0{,}5 r} = \frac{4}{3} r;$$

d. h. $l = l_1$, weil $(r - 0{,}5 r)^2 = (0{,}5 r)^2$ ist.

Wird ein prismatischer Stab von der Länge a nach Fig. 193 zu einem wälzenden Pendel gestaltet, indem man oben an zwei Seiten kleine Halbcylinder vom Halbmesser r befestigt und diese auf je einer wagerechten Schiene wiegen lässt, so ist $e = 0{,}5 a$; $i^2 = \frac{a^2}{12}$;

Fig. 193.

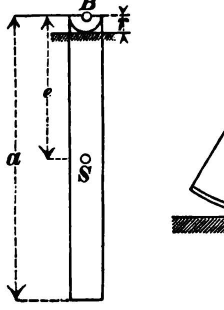
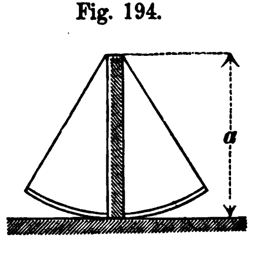


Fig. 194.



15) $$l = a \frac{\left(\frac{r}{a} - 0{,}5\right)^2 + \frac{1}{12}}{0{,}5}$$

$$= a\left(\frac{2}{3} - 2\frac{r}{a} + 2\frac{r^2}{a^2}\right),$$

während für die Drehung um die Achse B (nach 1. Theil, S. 283) einfach $l_1 = {}^2/_3 a$ ist. Für zwei Werthe von $\frac{r}{a}$ wird Gl. 15 zu $l = {}^2/_3 a$, nämlich

1. selbstverständlich für $r = 0$;
2. für $r = a = 2e$,

d. h. für eine Wiege, bei welcher der Rollkreis nach Fig. 194 aus einem sehr leichten Kreisbogen vom Halbmesser a gebildet ist. Für $\frac{r}{a} < 1$ ist $l < {}^2/_3 a$.

b) Wiegendes Pendel in einer Hohlfläche; Hypocykloiden-Wiege.

Die auf einander rollenden Kreise (Fig. 195) mögen die Halbmesser r und R haben. Der Schwerpunkt S des wiegenden Körpers liege wieder um e unterhalb des Mittelpunktes B seines Rollkreises vom Halbmesser r. Im Gleichgewichtszustande möge der Körper die Hohlfläche bei P_0 berühren; ertheilt man ihm eine Rollbewegung rechts herum, bis die Berührung in P erfolgt (Fig. 196), bezeichnet mit Q denjenigen Punkt, der vorher mit P_0 zusammenfiel, so muss $\widehat{PQ} = \widehat{PP_0}$ sein, oder wenn man

Fig. 195.

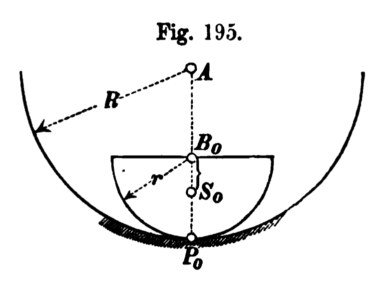
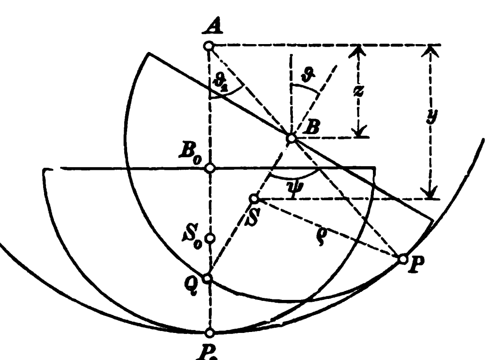


Fig. 196.



$$\measuredangle QBP = \psi,$$

$$\measuredangle P_0AB = \vartheta_1$$

setzt,

$$r \cdot \psi = R \cdot \vartheta_1,$$

mithin $\psi = \vartheta_1 \dfrac{R}{r}$.

Weicht die Gerade BSQ, welche ursprünglich lothrecht war (als $B_0 S_0 P_0$), um ϑ von der Lothrechten ab, so ist ϑ der Winkel, um den sich der Körper gedreht hat, als er aus der Gleichgewichtslage in die jetzige Zwischenlage kam, u. zw. ist nach der Figur

$$\vartheta = \psi - \vartheta_1 = \vartheta_1 \left(\frac{R}{r} - 1\right) = \frac{R-r}{r} \vartheta_1 \quad \text{also}$$

16) $$\vartheta_1 = \frac{r}{R-r} \vartheta.$$

Legt man durch den Mittelpunkt A des festen Kreises vom Halbmesser R eine Wagerechte, so liegt der Mittelpunkt B des beweglichen Kreises in der Tiefe $z = \overline{AB} \cdot \cos \vartheta_1 = (R - r) \cos \vartheta_1$

unter dem festen Punkt A, der Schwerpunkt S aber noch um $e \cdot \cos\vartheta$ tiefer, d. h. in der Tiefe

17) $$y = (R - r)\cos\vartheta_1 + e \cdot \cos\vartheta$$

unter A. In der höchsten Lage, die bei einer Schwingung vorkommt, möge ϑ den Werth α erreichen; setzt man dann noch (entsprechend Gl. 16) $\frac{r}{R-r}\alpha = \alpha_1$, so ist der Werth y in der höchsten Lage

18) $$y_1 = (R - r)\cos\alpha_1 + e \cdot \cos\alpha.$$

Beim Übergang aus der höchsten Lage in die beliebige Zwischenlage hat die Schwere die Arbeit geleistet

19) $$Mg(y - y_1) = Mg\left\{(R - r)(\cos\vartheta_1 - \cos\alpha_1) + e(\cos\vartheta - \cos\alpha)\right\}.$$

Für die ebene Rollbewegung des kleineren Kreises in dem grösseren ist der Berührungspunkt P der Pol; für die verkürzte Hypocykloide, welche der Schwerpunkt S beschreibt, ist daher $PS = \varrho$ eine Normale; daher muss, wenn man mit u die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, mit ω die Winkelgeschwindigkeit um den Schwerpunkt bezeichnet, wie auf S. 251,

$$\omega \cdot \varrho = u$$

sein, woraus sich, entsprechend der Gl. 2, S. 251, ergiebt:

$$\omega^2(\varrho^2 + i^2) = 2g(y - y_1) = 2g\left\{(R - r)(\cos\vartheta_1 - \cos\alpha_1) + e(\cos\vartheta - \cos\alpha)\right\}.$$

Mit $\omega = -\frac{d\vartheta}{dt}$ wird dann

$$dt = -d\vartheta\sqrt{\frac{\varrho^2 + i^2}{2g(y - y_1)}}.$$

Auch in diesem Falle möge nur auf sehr kleine Schwingungen weiter eingegangen werden, so dass annähernd

$$\varrho = r - e;$$

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2}; \quad \cos\vartheta_1 = 1 - \frac{\vartheta_1^{\,2}}{2} = 1 - \frac{\vartheta^2}{2}\frac{r^2}{(R-r)^2};$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}; \quad \cos\alpha_1 = 1 - \frac{\alpha^2}{2}\frac{r^2}{(R-r)^2}$$

gesetzt werden kann.

Dann wird nach Gl. 17 und 18

$$2g(y-y_1) = 2g\left\{(R-r)\left(\frac{\alpha^2-\vartheta^2}{2}\right)\frac{r^2}{(R-r)^2} + e\frac{\alpha^2-\vartheta^2}{2}\right\}$$

$$= g(\alpha^2-\vartheta^2)\left(\frac{r^2}{(R-r)} + e\right) \quad \text{und}$$

$$dt = -\frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2-\vartheta^2}}\sqrt{\frac{(r-e)^2+i^2}{\left(\frac{r^2}{(R-r)}+e\right)g}}. \quad \text{Setzt man}$$

20) $$l = \frac{(r-e)^2+i^2}{\frac{r^2}{R-r}+e},$$

so nimmt der Ausdruck für dt die einfache Form an:

21) $$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{d\vartheta}{\alpha^2-\vartheta^2},$$

was nach 1. Theil, S. 77 mit der Gleichung für die Bewegung eines einfachen Pendels von der Länge l übereinstimmt; somit ist für sehr kleine Schwingungen die Schwingungslänge l der Hypocykloiden-Wiege durch Gl. 20 ausgedrückt. Für $R = \infty$ stimmt Gl. 20 mit der Gl. 5, S. 252 für die gemeine Wiege überein.

Bei dieser Hypocykloiden-Wiege darf $e = 0$ werden, d. h. S mit B zusammenfallen; dann wird

$$l = \frac{r^2+i^2}{r^2}(R-r),$$

oder, wenn man $J = M\cdot i^2 = \mu r^2$ setzt,

$$l = (R-r)\left(1+\frac{\mu}{M}\right) \quad \text{und} \quad t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

was dem Sinne nach mit Gl. 7 im 1. Theile, S. 302 übereinstimmt.

Die Hypocykloiden-Wiege hat unter sonst gleichen Umständen eine kleinere Schwingungslänge, mithin auch eine kleinere Schwingungsdauer als die gemeine Wiege.

Eine wiegende Bewegung ist nur möglich, wenn der Körper in der tiefsten Lage Standsicherheit besitzt, wenn also (Fig. 196) bei einer kleinen Drehung nach rechts die Schwerpunkts-Lothrechte links von der Berührungsstelle P liegt. Bei wagerechter Unterstützungsfläche (Fig. 192) beträgt die linksseitige Entfernung der Schwerpunkts-Lothrechten von dem Stützpunkte P nur $e\sin\vartheta$;

diese Grösse muss positiv, d. h. $e > 0$ sein, oder es muss der Schwerpunkt S unter dem Mittelpunkte B liegen. Für $e = 0$ wird die Standsicherheit Null und zugleich $l = \infty$, d. h. es kommt keine Schwingung mehr zu Stande, und für $e < 0$ wird auch die Schwingungslänge < 0, was für ein Pendel widersinnig ist.

Bei der Hypocykloiden-Wiege aber darf der Schwerpunkt S auch oberhalb des Mittelpunktes B liegen, wie aus Fig. 196 ersichtlich. Der linksseitige Abstand der Schwerpunkts-Lothrechten von dem Stützpunkte P beträgt nämlich

$$r \sin \vartheta_1 + e \sin \vartheta,$$

also für kleine Winkel

$$r\vartheta_1 + e\vartheta = \vartheta\left(\frac{r^2}{R - r} + e\right);$$

dieser Werth muss > 0 sein. Es wird also eine Hypocykloiden-Wiege auch noch bei negativem e möglich sein, wenn nur der absolute Werth des negativen e kleiner ist als $\frac{r^2}{R - r}$, oder

$$\frac{r^2}{R - r} > -e. \tag{22}$$

Für $\frac{r^2}{R - r} = -e$ würde wiederum $l = \infty$. Es würde z. B. für $R = 2r$ $\qquad r > -e$

sein müssen, d. h. der Schwerpunkt dürfte nur um weniger als r oberhalb des Punktes B liegen.

c) Wiegendes Pendel auf einer gewölbten Fläche; Epicykloiden-Wiege (Fig. 197).

In diesem Falle muss für Standsicherheit in der Gleichgewichtslage die Bedingung erfüllt sein

$$e \sin \vartheta > r \sin \vartheta_1,$$

oder für kleine Winkel $\quad e \cdot \vartheta > r \cdot \vartheta_1$, und weil

$$r \cdot \psi = R \cdot \vartheta_1, \quad \text{und zugleich}$$

$$\vartheta = \vartheta_1 + \psi = \vartheta_1\left(1 + \frac{R}{r}\right), \quad \text{also}$$

$$\vartheta_1 = \vartheta \frac{r}{R + r},$$

so folgt als Bedingung der Standsicherheit

$$e > \frac{r^2}{R + r}. \tag{23}$$

Bei der Epicykloiden-Wiege muss der Schwerpunkt also tiefer liegen als bei der einfachen Cykloiden-Wiege.

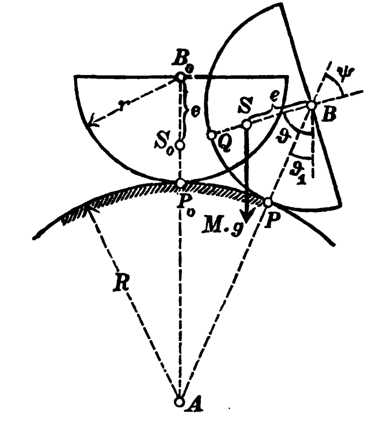


Fig. 197.

Die gleichen Erwägungen, wie sie bei der Hypocykloiden-Wiege angestellt wurden, führen hier zu den Gleichungen

$$l = \frac{(r - e)^2 + i^2}{e - \frac{r^2}{R + r}} \quad \text{und} \tag{24}$$

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}}, \tag{25}$$

worin l wieder die Schwingungslänge der Wiege bedeutet. $R = \infty$ führt auch hier wieder zur einfachen Cykloiden-Wiege mit

$$l = \frac{(r - e)^2 + i^2}{e}.$$

d) Die Wippe.

Wird in Fig. 197 der Halbmesser r des rollenden Kreises unendlich gross, so haben wir es mit dem Abwälzen einer ebenen Fläche, z. B. der Unterfläche einer Bohle, auf einem cylindrischen Baume, mit einer Wippe (Fig. 198), zu thun. Doch sind für diesen Fall die Formeln 23 und 24 nicht unmittelbar zu verwenden, weil $r = \infty$ auch $e = \infty$ bedingen würde. Vielmehr muss die Höhe des Schwerpunktes der wippenden Bohle über ihrer Unterfläche etwa mit h eingeführt, und in den

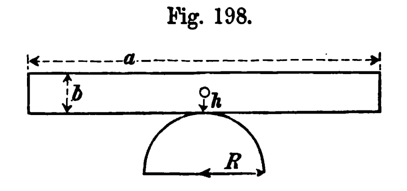


Fig. 198.

Formeln 23 und 24 $r-e$ mit h und e mit $r-h$ vertauscht werden. Dann wird aus Formel 23:

$$r-h > \frac{r^2}{R+r}; \quad h < r - \frac{r^2}{R+r} = \frac{Rr}{R+r} = \frac{R}{\frac{R}{r}+1}$$

und, weil $r = \infty$, verlangt die Standsicherheit der Wippe

26) $$h < R.$$

Aus Formel 24 wird

$$l = \frac{h^2+i^2}{r-h-\frac{r^2}{R+r}} = \frac{h^2+i^2}{Rr-h(R+r)}(R+r) = \frac{(h^2+i^2)\left(\frac{R}{r}+1\right)}{R-h\left(\frac{R}{r}+1\right)}$$

und mit $r = \infty$ als Schwingungslänge der Wippe

27) $$l = \frac{h^2+i^2}{R-h}.$$

Die Formeln 26 und 27 lassen sich auch leicht unmittelbar finden.

Beispiel: Es sei (Fig. 198) $a = 2^{\text{m}}$; $b = 5^{\text{cm}} = 0{,}05^{\text{m}}$; $h = 0{,}025^{\text{m}}$ $R = 0{,}1^{\text{m}}$. Dann wird für das polare Trägheitsmoment des Rechtecks nach 1. Theil, S. 271:

$$i^2 = \frac{a^2+b^2}{12} = \frac{4+0{,}05^2}{12} = 0{,}334, \text{ daher}$$

$$l = \frac{0{,}0006+0{,}334}{0{,}1-0{,}025} = 4{,}46^{\text{m}}$$

und die Dauer einer einfachen Schwingung

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \text{rund } \sqrt{l} = 2{,}1^{\text{s}}.$$

Offenbar ist für derartige Bohlenwippen genügend genau

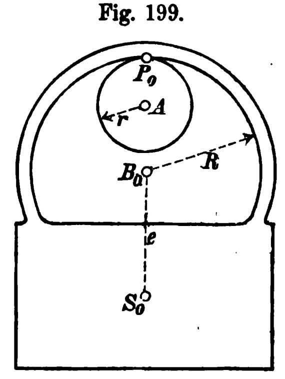
$$l = \frac{a^2}{12(R-h)} = \frac{a^2}{12\left(R-\frac{b}{2}\right)} = 4{,}44^{\text{m}}.$$

e) Hängende Wiege.

Mittels eines Ringes vom Halbmesser R sei ein mit dem Ringe starr verbundener Körper über einen festen Cylinder vom Halbmesser r gehängt, wobei $r < R$ (Fig. 199). Der Schwerpunkt S der Wiege liege um e unter dem Mittelpunkte des Ringes vom Halbmesser R. Ertheilt man dem Körper eine Rollbewegung links herum, bis der Berührungspunkt sich in P befindet (Fig. 200).

und bezeichnet mit Q denjenigen Punkt, der vorher mit P_0 zusammenfiel, so muss $\overset{\frown}{PQ} = \overset{\frown}{PP_0}$ oder $R\psi = r \cdot \vartheta_1$ sein. Weicht die Gerade QBS, welche ursprünglich lothrecht war ($P_0 B_0 S_0$) um ϑ von der Lothrechten ab, so ist ϑ der Winkel, um den sich der Körper gedreht hat, und zwar ist nach der Figur

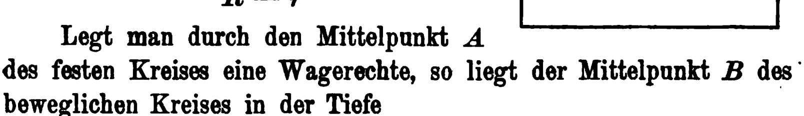
Fig. 199.



$$\vartheta = \vartheta_1 - \psi = \vartheta_1 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

$$= \vartheta_1 \frac{R - r}{R} \quad \text{und}$$

$$\vartheta_1 = \frac{R}{R - r} \vartheta .$$



Legt man durch den Mittelpunkt A des festen Kreises eine Wagerechte, so liegt der Mittelpunkt B des beweglichen Kreises in der Tiefe

Fig. 200.

$$z = \overline{AB} \cdot \cos \vartheta_1 = (R - r) \cos \vartheta_1 ,$$

der Schwerpunkt S aber in der Tiefe

$$y = (R - r) \cos \vartheta_1 + e \cdot \cos \vartheta .$$

In der höchsten Lage, die bei einer Schwingung vorkommt, möge ϑ den Werth α erreichen; setzt man dann auch noch

$$\frac{R}{R - r} \alpha = \alpha_1 ,$$

so ist der Werth y in der höchsten Lage

$$y_1 = (R - r) \cos \alpha_1 + e \cos \alpha .$$

Beim Übergang aus der höchsten Lage in die Zwischenlage hat die Schwere die Arbeit geleistet

$$Mg(y - y_1) = Mg\left\{(R - r)(\cos \vartheta_1 - \cos \alpha_1) + e(\cos \vartheta - \cos \alpha)\right\}.$$

Es wird daher nach dem Satze der Arbeit (wie auf S. 256) mit

$$\varrho = PS = \text{annähernd } R + e, \quad \omega^2(\varrho^2 + i^2) = 2g(y - y_1)$$

$$dt = -d\vartheta \sqrt{\frac{(R + e)^2 + i^2}{2g(y - y_1)}} .$$

Daraus folgt in ähnlicher Weise wie auf S. 256

$$dt = -\frac{d\vartheta}{\alpha^2 - \vartheta^2}\sqrt{\frac{(R+e)^2 + i^2}{\left(\frac{R^2}{R-r} + e\right)g}}.$$

Hiermit ist die Schwingungslänge der hängenden Wiege

$$l = \frac{(R+e)^2 + i^2}{\frac{R^2}{R-r} + e}. \tag{28}$$

Besteht der wiegende Körper nur aus einem dünnen Ringe, so wird mit $e = 0$ und $i^2 = R^2$:

$$l = 2(R - r),$$

und schliesslich mit $r = 0$ für den ein physisches Pendel bildenden Ring $l = 2R$, wie schon im 1. Theile, S. 284 gefunden wurde.

Mit $R + e = -h$ und schliesslich $R = \infty$ wird aus der hängenden Wiege wiederum die Wippe mit

$$l = \frac{h^2 + i^2}{Rr - (R-r)h}(R - r) = \frac{h^2 + i^2}{r - h}.$$

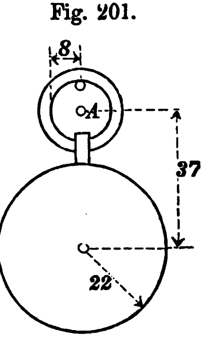
Beispiel: Der in Fig. 201 dargestellte Körper (Taschenuhr) hänge auf einem Stifte von 1^{mm} Halbmesser; es ist $R = 8^{\text{mm}}$; $r = 1^{\text{mm}}$; $e = 37^{\text{mm}}$; i^2 annähernd $= \frac{22^2}{2}$; also (Gl. 28)

$$l = \frac{(8+37)^2 + 242}{\frac{64}{7} + 37} = 49{,}5^{\text{mm}},$$

daher die Schwingungsdauer annähernd

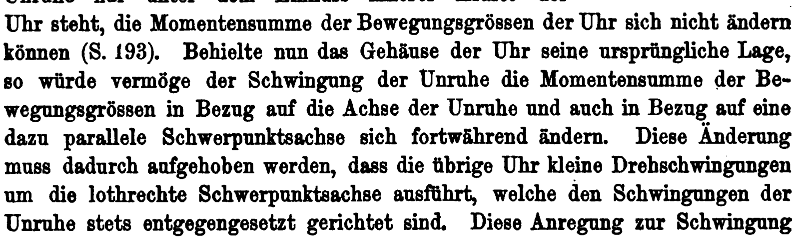
$$t = \sqrt{0{,}0495} = 0{,}22^{\text{s}}.$$

Fig. 201.



Fast die gleiche Schwingungsdauer hat auch die Unruhe der Taschenuhr (S. 233).

Denkt man sich diese Uhr auf einem schwimmenden Brettchen liegend, so wird, weil die schwingende Unruhe nur unter dem Einfluss innerer Kräfte der



Uhr steht, die Momentensumme der Bewegungsgrössen der Uhr sich nicht ändern können (S. 193). Behielte nun das Gehäuse der Uhr seine ursprüngliche Lage, so würde vermöge der Schwingung der Unruhe die Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf die Achse der Unruhe und auch in Bezug auf eine dazu parallele Schwerpunktsachse sich fortwährend ändern. Diese Änderung muss dadurch aufgehoben werden, dass die übrige Uhr kleine Drehschwingungen um die lothrechte Schwerpunktsachse ausführt, welche den Schwingungen der Unruhe stets entgegengesetzt gerichtet sind. Diese Anregung zur Schwingung

macht sich auch geltend, wenn man die Uhr nach Fig. 201 aufhängt; stimmt die Schwingungsdauer der aufgehängten Uhr mit derjenigen der Unruhe überein, so kann die aufgehängte Uhr unter günstigen Umständen in Folge der Bewegung der Unruhe in deutlich sichtbare Schwingungen gerathen.

18. Wirkung des Pulvers in der Kanone.

In Folge der Ausdehnung der entwickelten Pulvergase wird dem Geschosse, welches zu Anfang, ebenso wie die Kanone, die Geschwindigkeit Null hatte, eine Geschwindigkeit v beim Verlassen des Rohres ertheilt. Da nun der Gasdruck des Pulvers für die aus Geschoss, Kanone und Lafette bestehende Massengruppe eine innere Kraft ist, so muss, wenn äussere Kräfte von bedeutender Grösse in wagerechter Richtung nicht auftreten, der Gesammtschwerpunkt an der ursprünglichen Stelle verbleiben, oder es muss die Bewegungsgrösse in der Richtung des als nahehezu wagerecht gedachten Rohres Null verbleiben (S. 173). Es werden daher Kanone und Lafette zu einem Rücklaufe mit der Geschwindigkeit v_1 veranlasst. Ist M die Masse, welche das Rohr mit der Geschwindigkeit v verlässt, M_1 die Masse der Kanone und Lafette, so muss

$$-M_1 v_1 + Mv = 0, \quad \text{also}$$

1) $$v_1 = \frac{M}{M_1} v \quad \text{sein.}$$

Die relative Geschwindigkeit des Geschosses in Bezug auf die zurücklaufende Kanone ist offenbar

$$w = v + v_1 = v\left(1 + \frac{M}{M_1}\right).$$

Da das Rohr vom Halbmesser r schraubenlinienförmige Züge vom Ansteigungswinkel α und der Ganghöhe oder dem Drall h besitzt, so entspricht der Verschiebungsgeschwindigkeit

$$w = v\left(1 + \frac{M}{M_1}\right)$$

noch eine Winkelgeschwindigkeit φ von der Grösse

2) $$\varphi = \frac{v}{r \cdot tg\,\alpha}\left(1 + \frac{M}{M_1}\right) = \frac{v \cdot 2\pi}{h}\left(1 + \frac{M}{M_1}\right).$$

Ist nun μ die auf die Längsachse und den Abstand r bezogene Masse des Geschosses, so ist das gesammte Arbeitsvermögen in

dem Augenblicke, wo das Geschoss aus dem Rohre tritt, gleich der Ausdehnungsarbeit $\mathfrak{A}$ der Pulvergase im Rohre, d. h.

$$\mathfrak{A} = \frac{Mv^2}{2} + \frac{M_1 v_1^2}{2} + \frac{\mu \cdot r^2 \varphi^2}{2} \quad \text{oder}$$

3) $$\mathfrak{A} = \frac{Mv^2}{2}\left\{1 + \frac{M_1}{M} + \frac{\mu}{M}\frac{4 r^2 \pi^2}{h^2}\left(1 + \frac{M}{M_1}\right)^2\right\}.$$

Ist l die nutzbare Rohrlänge, so ergiebt sich die mittlere Triebkraft des Pulvers zu

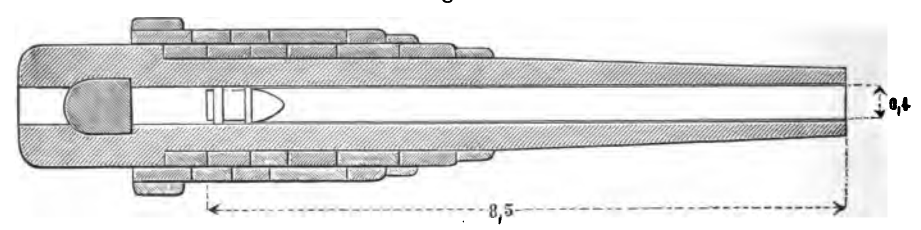
4) $$K = \frac{\mathfrak{A}}{l}$$

und der mittlere Gasdruck zu

5) $$p = \frac{\mathfrak{A}}{r^2 \pi l} = \frac{K}{r^2 \pi}.$$

Beispiel: Eine grosse Krupp'sche Kanone von $0{,}4^{\text{m}}$ lichter Weite und $l = 8{,}5^{\text{m}}$ nutzbarer Rohrlänge (Fig. 202) ertheile mit 200 kg Pulverladung dem

Fig. 202.



Geschosse von 1 m Länge und 700 kg Gewicht eine Geschwindigkeit $v = 500^{\text{m}}/_{\text{s.}}$. Das Rohr wiege 70 000 kg, die Lafette 40 000 kg. Der Drall der Züge betrage $h = 18^{\text{m}}$.

Die Pulvergase treten zwar nicht durchweg mit der Geschwindigkeit v aus dem Rohre, aber doch der vorderste Theil derselben; daher wird man bei der Berechnung der Bewegungsgrösse die Hälfte der Masse des Pulvers, bei derjenigen des Arbeitsvermögens ein Drittel dieser Masse mit zu M rechnen dürfen. Sonach ist die Geschwindigkeit des Rücklaufes

$$v_1 = 500 \cdot \frac{700 + 100}{70000 + 40000} = 3{,}6^{\text{m}}/_{\text{s.}}.$$

Wollte man den Rücklauf ganz verhindern, so müsste man eine Widerstandskraft $= K$ (Gl. 4) wirken lassen; diese steht aber gewöhnlich nicht zur Verfügung. Übrigens beträgt auch derjenige Theil des Rücklaufes, während dessen die volle Pulverkraft das Rohr zurücktreibt, nur

$$l \cdot \frac{M}{M + M_1} = \frac{8{,}5 \cdot 800}{110000 + 800} = 0{,}061^{\text{m}}.$$

Das entstandene Arbeitsvermögen der Kanone nebst Lafette

$$\frac{M_1 v_1^2}{2} = 110000 \cdot \frac{3{,}6^2}{2g} = 72660 \text{ mkg}$$

wird dann durch geeignete Bremsvorrichtungen aufgezehrt.

Die auf die Längsachse und den Abstand r bezogene Masse des Geschosses möge zu der Hälfte der Masse des Geschosses, also zu $\mu = \frac{350}{g}$ geschätzt werden. Dann ist die Arbeit der Pulvergase:

$$\mathfrak{A} = \left(700 + \frac{200}{3}\right) \frac{500^2}{2g} \left\{1 + \frac{800^2}{767 \cdot 110000} + \frac{350}{767} \cdot \frac{4 \cdot 0{,}2^2 \cdot \pi^2}{18^2} (1{,}0072)^2\right\},$$

$$\mathfrak{A} = 9\,768\,943\,(1 + 0{,}0076 + 0{,}0025) = 9\,768\,943 \cdot 1{,}0101,$$

$$\mathfrak{A} = 9\,867\,609 \text{ mkg},$$

die mittlere Triebkraft des Pulvers

$$K = \frac{9867609}{8{,}5} = 1\,161\,000 \text{ kg},$$

der mittlere Druck (mit $20^2 \pi = 1257$)

$$\frac{1\,161\,000}{1257} = 923 \text{ kg/qcm} = 923 \text{ at}.$$

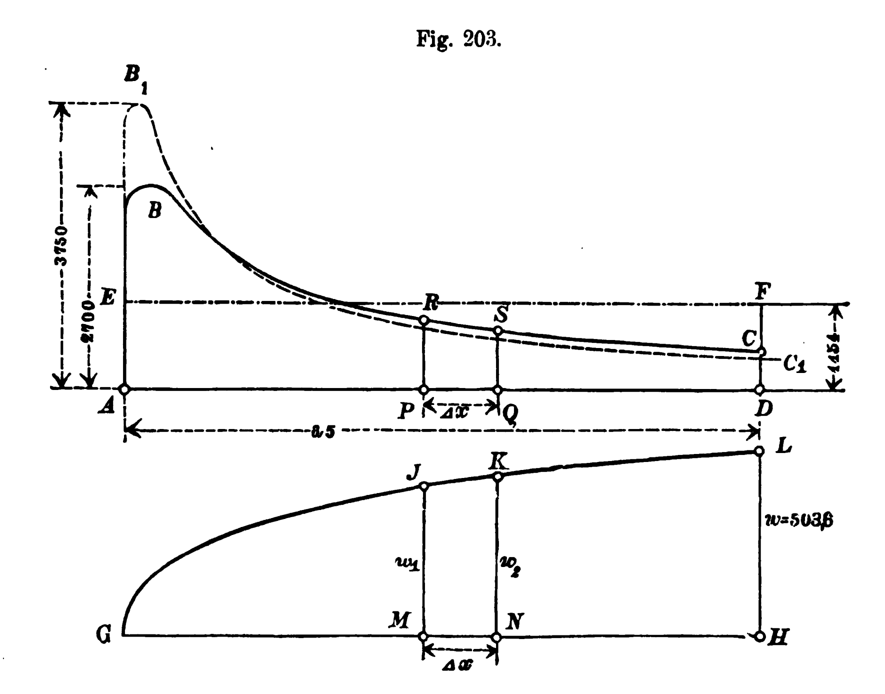
Das Einpressen des Geschossmantels in die Züge und die Reibung erhöhen den mittleren Druck noch um etwa $\frac{1}{4}$, d. h. um 231 at, auf 1154 at.

Der wirkliche Druck im Rohr ist unmittelbar nach der Entzündung des Pulvers sehr gross und nimmt mit dem Vorrücken des Geschosses wegen der Ausdehnung der Gase ab. Benutzt man die vom Geschosse zurückgelegten Wegeslängen als Abscissen, die entsprechenden Gasdrücke als Ordinaten, so ergiebt sich eine Kurve von der Art der in Fig. 203 ausgezogenen Linie $ABRSC$. Diese Kurve würde annähernd eine adiabatische Linie (2. Theil, S. 340) sein, wenn die ganze Pulvermenge sich gleichzeitig entzündete. Da aber stets ein gewisses Nachbrennen erfolgt, so wird dadurch die Kurve beeinflusst. Weil neuere Versuchsergebnisse bezüglich dieser Linie uns nicht zur Verfügung standen, haben wir den abfallenden Theil derselben als gleichseitige Hyperbel angenommen und so bemessen, dass die mit dem Flächeninhalte des Rohrquerschnittes multiplicirte Fläche $ABRSCD$ die Gesammtarbeit der Pulvergase darstellt, dass also die Fläche gleiche Grösse hat mit dem Rechteck $AEFD$, dessen Höhe dem mittleren Druck 1154 at entspricht. Der grösste Druck, den der hintere Theil des Rohres auszuhalten hat, beträgt etwa 2700 at. Ein schneller verbrennendes Pulver erzeugt eine Druckkurve von der Form der in Fig. 203 gestrichelten Linie AB_1C_1 mit einer grössten Druckordinate von etwa 3750 at, welche dann aber bald stark abfällt, da ihre Fläche unter Annahme derselben Austrittsgeschwindigkeit des Geschosses von 500 m/s. den gleichen Werth haben muss wie die Fläche der ausgezogenen Druckkurve. Damit das Geschütz diese gewaltigen Drücke aushalten könne, ist der hintere Theil des eigentlichen Rohres durch mehrere Lagen warm aufgezogener Ringe (Fig. 202) verstärkt.

Es besteht eine bestimmte Beziehung zwischen der Druckkurve und der Art der Bewegung des Geschosses im Rohre.

Da wir den rechnungsmässig erforderlichen mittleren Druck mit Rücksicht auf die Widerstände um $^1/_4$ erhöht haben, so folgt umgekehrt, dass von der

Fig. 203.



Gesammtarbeit der Pulvergase nur 80% auf die Bewegung übertragen werden, so dass stattfinden muss, wenn die ausgezogene Druckkurve benutzt und ihre Fläche $ABRSCD = F$ gesetzt wird, $0{,}8\, r^2 \pi \cdot F = \mathfrak{A}$.

Schreibt man nun

$$\mathfrak{A} = \frac{Mv^2}{2}\,\alpha$$

(mit $\alpha = 1{,}0101$ in dem Zahlenbeispiele), so wird

$$v^2 = \frac{2\, r^2 \pi \cdot 0{,}8}{M \cdot \alpha}\, F.$$

Da die scheinbare (relative) Geschwindigkeit des Geschosses in Bezug auf das Rohr

$$w = v\left(1 + \frac{M}{M_1}\right) \quad \text{ist,}$$

so wird

$$w^2 = \frac{2\, r^2 \pi \cdot 0{,}8}{M \cdot \alpha}\left(1 + \frac{M}{M_1}\right)^2 F.$$

Entspricht nun einer Wegeslänge $x = AP$ (Fig. 203) die scheinbare Geschwindigkeit w_1, dem Werthe $x + \Delta x$ die Geschwindigkeit w_2, so muss entsprechend vorstehender Gleichung auch gelten

$$w_2^2 - w_1^2 = \frac{2\,r^2\pi \cdot 0{,}8}{M \cdot a}\left(1 + \frac{M}{M_1}\right)^2 \Delta F,$$

wenn $\Delta F = PRSQ$ ist. Dies giebt für den vorliegenden Fall

$$w_2^2 - w_1^2 = \frac{2 \cdot g \cdot 1257 \cdot 0{,}8}{767 \cdot 1{,}0101}\, 1{,}0072^2 \cdot \Delta F = 25{,}83\, \Delta F.$$

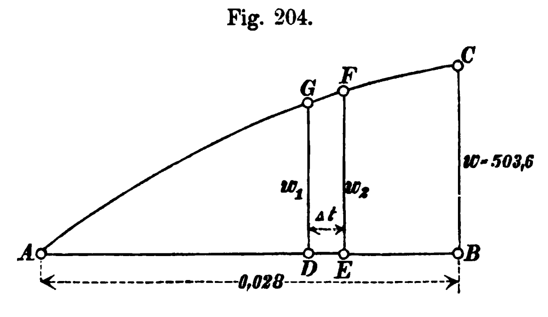
Mittels dieser Gleichung lässt sich die Geschwindigkeit w_x an verschiedenen Stellen des Rohres berechnen und durch die Kurve $GJKL$ (Fig. 203, unten) darstellen.

In der Darstellung der Geschwindigkeit als Funktion der Zeit (Fig. 204) muss die dem Zeitraume Δt entsprechende Fläche

$$DEFG = \Delta x,$$

daher annähernd

Fig. 204.



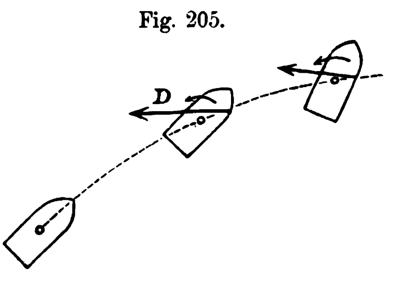
$$\Delta t = \frac{\Delta x}{{}^1/_2\,(w_1 + w_2)}$$

sein. Hiernach kann man die Zeittheile berechnen, die zu den einzelnen Geschwindigkeits-Zunahmen erforderlich sind, und erhält zugleich die Geschwindigkeitskurve $AGFC$ (Fig. 204) und die Gesammtzeit $0{,}028$ s. für die Zurücklegung des $8{,}5$ m langen Weges im Rohre. Die mittlere Geschwindigkeit im Rohr ist sonach $8{,}5 : 0{,}028 = 303{,}6$ m/s..

Seitliche Ablenkung des Geschosses in Folge seiner Drehung und des Luftwiderstandes.

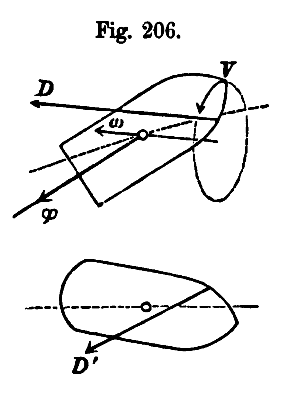
Hätte das Geschoss beim Verlassen des Rohres keine Winkelgeschwindigkeit, so würde es im luftleeren Raume stets seiner Anfangslage parallel bleiben, in der Atmosphäre aber durch den Widerstand D derselben, welcher bei der üblichen Geschossform oberhalb des Schwerpunktes vorbeigeht, eine derartige Drehung (linksherum in der Fig. 205) erfahren, dass es in eine höchst ungünstige Richtung zur Flugbahn des Schwerpunktes gelangen würde. Die bedeutende Winkelgeschwindigkeit nun, welche die schraubenlinien-förmigen Züge des Rohres dem

Fig. 205.



Geschoss ertheilen, verhindert das Überschlagen des Geschosses in ähnlicher Weise, wie die schnelle Drehung eines Kreisels dem Umfallen desselben entgegenwirkt. Überträgt man die Erscheinungen bei der Drehung des Kreisels um den unteren Endpunkt der Achse sinngemäss auf die Drehung des Geschosses um seinen Schwerpunkt, so ergiebt sich Folgendes: Sobald die Achse des mit grosser Geschwindigkeit φ in Drehung gesetzten Kreisels etwas schief gegen die Richtung der Schwere steht, so dass sein Gewicht nicht durch den Drehpunkt geht, beschreibt die Achse des Kreisels, statt umzufallen, einen fein gerippten Kegel, dessen Achse durch den Drehpunkt geht und parallel der Richtung des Gewichtes ist, mit einer Winkelgeschwindigkeit ω (S. 221). Dem entsprechend erfährt die Achse des Geschosses eine langsame Drehung um die zu dem Luftwiderstande D parallele Schwerpunktsachse (Fig. 206). Ist die Schraubenlinie der Züge eine rechtsgängige, so ist der Sinn der Winkelgeschwindigkeit φ nach rückwärts gerichtet, und das Gleiche gilt dann von ω. Daraus folgt eine Bewegung der Spitze des Geschosses in einem solchen Sinne, dass sie aus der lothrechten Zielebene eine nach rechts gerichtete Ablenkung erfährt. Hierdurch bekommt nun der Luftwiderstand auch im Grundriss eine schiefe Richtung gegen das Geschoss, so dass auch dessen Schwerpunkt nun nach rechts aus der Zielebene hinausgedrängt wird. Freilich ändert die Richtung des Luftwiderstandes D mit der Drehung des Geschosses fortwährend seine Richtung, und die Kreiselung wird in Folge dessen eine sehr unregelmässige. Daher werden auf die erste Ablenkung nach rechts bald solche nach unten, nach links und nach oben folgen. Weil aber das Geschoss bei der ersten Ablenkung noch die grösste Geschwindigkeit hat, so ist diese von überwiegendem Einfluss. Erfahrungsmässig zeigen dann auch alle Geschosse aus rechtsgängig gezogenen Rohren eine nach rechts gerichtete Abweichung aus der lothrechten Zielebene. (Vergl. die hiervon unabhängige Abweichung wegen der Drehung der Erde, S. 143.)

Fig. 206.



Vierte Abtheilung.

Kurze Mittheilungen über die wesentlichsten Förderer der Mechanik.

---

1. **Archimedes**, geboren 287 v. Chr. in Syrakus, gestorben daselbst 212 v. Chr., ist als Schöpfer der heutigen Gleichgewichtslehre zu bezeichnen. Die von ihm verfassten und auf uns überlieferten Schriften über Statik haben noch jetzt im Wesentlichen Gültigkeit. Seine Untersuchungen bezogen sich auf das Gleichgewicht am Hebel und am Flaschenzuge. Er übersah klar, dass man durch entsprechende Wahl der Übersetzung mit einer gegebenen Kraft jeden beliebig grossen Widerstand überwinden könne. Archimedes kannte auch die Schwerpunkte ebener Gebilde (s. 1. Theil, S. 136), sowie die Grundlehren vom Gleichgewichte flüssiger Körper, besonders vom Auftriebe des Wassers gegen eingetauchte feste Körper (s. 2. Theil, S. 185).

2. **Heron**, der um 120 v. Chr. in Alexandria lebte, erweiterte die von Archimedes am Hebel und am Flaschenzuge gezeigte Möglichkeit beliebig grosser Kraftverstärkung (Übersetzung), indem er die Lehre von der Wirkungsweise des Keiles, der Schraube, der Zahnräder, des Rades an der Welle mit Seiltrommel entwickelte.

3. **Pappus**, um 390 n. Chr. ebenfalls in Alexandria lebend, zeigte die Entwickelung der Schwerpunkte von Körpern, sowie den Satz, dass der Inhalt eines Umdrehungskörpers gleich dem Produkt aus der erzeugenden Meridian-Schnittfläche und dem Drehungsweg ihres Schwerpunktes (s. 1. Theil, S. 136). Dann ruhte die Entwickelung der Mechanik bis zur Zeit von

4. **Leonardo** da Vinci, geboren 1452 zu Vinci bei Florenz, gestorben 1519 im Schlosse Cloux bei Amboise (Frankreich). Leonardo

war von einer fast unbegreiflichen Vielseitigkeit; er zeichnete sich aus als Maler, Architekt, Ingenieur, Mathematiker, Philosoph, Dichter und Musiker. Er besass eine bedeutende Einsicht in die Gesetze der Bewegung auf schiefer Ebene und des freien Falles. Über das Verhältnis der Bewegungslehre zur Mathematik sagt er: „Die Mechanik ist das Paradies der mathematischen Wissenschaften, da man in ihr zur Frucht des mathematischen Wissens gelangt.“ Seine Schriften sind aber nach seinem Tode vergessen und erst am Ende des 18. Jahrhunderts wieder entdeckt worden. Seine Nachfolger in der Entwickelung der Mechanik scheinen nicht daraus geschöpft zu haben.

5. **Simon Stevin,** geboren 1548 zu Brügge, gestorben 1620 zu Haag, fand die Gleichgewichts-Verhältnisse an der schiefen Ebene.

6. **Galileo Galilei,** geboren am 18. Februar 1564 zu Pisa, gestorben am 8. Januar 1642 zu Arcetri, ist der Begründer der Lehren von der bewegenden Wirkung der Kräfte, der Dynamik. Er sprach (1638) das Gesetz der Trägheit bestimmt aus (s. 1. Theil, S. 31), entdeckte, dass bei der Fallbewegung die Geschwindigkeit mit der Zeit verhältnisgleich wächst. Er stellte das Gesetz vom Parallelogramm der Bewegungen auf und gelangte durch Vereinigung der Fallbewegung mit gleichförmiger Bewegung zu der parabolischen Wurfbewegung (s. 1. Theil, S. 48). Er erkannte, dass die Schwingungsdauer des Pendels proportional mit $\sqrt{l}$ sei, fand auch das Gesetz der parabolischen Kettenlinie (s. 1. Theil, S. 181).

7. **Christian Huyghens,** geboren am 14. April 1629 zu Haag, gestorben daselbst am 8. Juni 1695, war als bedeutender Mathematiker besonders befähigt, die neuen Bewegungsgesetze in mathematische Formeln zu kleiden und zu verallgemeinern. Er entwickelte die Lehre vom Schwingungspunkte des physischen Pendels (s. 1. Theil, S. 279), erfand die Pendeluhr, die Unruhe zur Hemmung der Taschenuhren, berechnete die Grösse der Centrifugalkraft (s. 1. Theil, S. 88), fand die Eigenschaften der Cykloide (s. S. 124), die Lehre von den Evoluten, sowie auch die Veränderlichkeit der Fallbeschleunigung mit der geographischen Breite wegen der Drehung der Erde.

8. **Isaac Newton,** geboren am 5. Januar 1643 zu Woolstorpe in Lincolnshine, gestorben am 20. März 1726 zu Kensington, hat die Grundlehren der heute geltenden Mechanik zum Abschlusse

gebracht. Er übertrug mit bewundernswerther Kühnheit die auf der Erde gewonnenen Erfahrungen auf Stellen ausserhalb derselben und gelangte so schrittweise zu dem Satze der allgemeinen Massenanziehung (s. 1. Theil, S. 54). Die Abhängigkeit dieser Anziehungskraft von dem Quadrate der Entfernung muthmafste er aus der Vergleichung der Centripetalbeschleunigung des Mondes und der Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche (s. 1. Theil, S. 62). Der Satz vom Parallelogramm wurde von Newton bestimmt gefasst, auch der Satz von der Wechselwirkung aufgestellt und der Satz von der Bewegung des Schwerpunktes abgeleitet.

9. **Johann Bernoulli,** geboren am 27. Juli 1667 zu Basel, gestorben daselbst am 1. Januar 1748, erkannte die allgemeine Bedeutung des Satzes der virtuellen Verrückungen (s. S. 157) für alle Aufgaben des Gleichgewichtes. Den Satz des Arbeitsvermögens (s. 1. Theil, S. 45) hat er ohne Beweis ausgesprochen.

10. **Daniel Bernoulli,** der Sohn des Vorgenannten, geboren am 29. Januar 1700 zu Groningen, gestorben am 17. März 1782 zu Basel, verfasste 1738 ein grundlegendes Werk über Hydrodynamik, entwickelte darin besonders die Formel für die Ausflussgeschwindigkeit $w = \sqrt{2gh}$ (s. 2. Theil, S, 243) und folgerte daraus die Gleichungen für den hydraulischen Druck, für den Druck eines Flüssigkeitsstrahles gegen einen festen Körper und für die Reaktion ausfliessenden Wassers, die er bereits als Triebkraft für Schiffe in Vorschlag brachte (s. 2. Theil, S. 268).

11. **Leonhard Euler,** geboren am 15. April 1707 zu Basel, gestorben am 18. September 1783 zu Petersburg, der bedeutendste Mathematiker seiner Zeit, schrieb 1736 das erste umfassende Werk über analytische Mechanik. Er führte darin u. A. den Begriff Trägheitsmoment (s. 1. Theil, S. 267) ein, bestimmte die Schwerpunkts-Hauptachsen eines Körpers (S. 198) und entwickelte die Gleichungen für die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt (s. S. 211). Von Euler rühren auch schon die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung vollkommen flüssiger Körper her (s. 2. Teil, S. 225 und 272), sowie die Grundgleichung der Biegungslinie, mit deren Hülfe er die bekannte Formel für die Knickfestigkeit (s. Keck, Elasticitätslehre S. 135) ableitete.

12. **Jean le Rond d'Alembert,** geboren am 16. November 1717 zu Paris, gestorben daselbst am 29. Oktober 1783 machte sich durch die Aufstellung und den Beweis des nach ihm benannten Satzes (1. Theil, S. 139) im Jahre 1743 besonders verdient um die systematische Formgebung der **Mechanik** behufs Erleichterung der Lösung von Bewegungs-Aufgaben.

13. **Joseph Louis Lagrange,** geboren am 25. Januar 1736 zu Turin, gestorben am 10. April 1813 zu Paris, war ein bedeutender Nachfolger von Euler und d'Alembert; er verfasste 1788 sein meisterhaftes Werk über analytische Mechanik. S. a. S. 161.

14. **Charles Coulomb,** geboren am 14. Juni 1736 zu Augoulême, gestorben am 23. August 1806 zu Paris, hat sich besonders verdient gemacht durch die Begründung der Lehre vom Erddruck gegen Stützmauern und durch richtige Behandlung der gewöhnlichsten Aufgaben der Fertigkeitslehre.

15. **Louis Poinsot,** geboren 1777 zu Paris, gestorben daselbst 1859, führte die Kräftepaare ein und entwickelte mit deren Hülfe die 6 Gleichgewichts-Gleichungen in der jetzt gebräuchlichen Form, (s. 1. Theil, S. 146). Auch fand er das Trägheits-Ellipsoid (s. S. 197) und dessen Bedeutung für die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt (s. S. 224), sowie für die freie Bewegung eines Körpers, aufgefasst als gleichzeitige Verschiebung und Rollbewegung oder auch als augenblickliche Schraubenbewegung.

16. **Louis Navier,** geboren am 15. Februar 1785 zu Dijon, gestorben 1836 zu Paris, ist der Begründer der wissenschaftlichen Elasticitätslehre und Baumechanik. Er entwickelte die wichtigsten Fälle gebogener Balken, zeigte die Berechnung der Bogen- und Hängebrücken, sowie der Stäbe, Säulen und Pfeiler mit excentrischer Druckbelastung.

17. **Gustav Coriolis,** geboren 1792, gestorben 1843 zu Paris, hat namentlich für die Ausbildung der Lehre von der scheinbaren (relativen) Bewegung gewirkt, indem er die beiden Ergänzungskräfte derselben einführte (s. S. 135).

18. **J. V. Poncelet,** geboren am 1. Juli 1788 zu Metz, gestorben am 22. December 1867 bei Paris, hat die Ausbildung aller Theile der Mechanik für praktische Zwecke gefördert, hat namentlich

wichtige Versuche über Wasserbewegung angestellt (s. 2. Theil, S. 239); auch hat er der Ausbildung der graphischen Statik erheblich vorgearbeitet.

19. **Adhémar de Saint-Vénant**, geboren am 23. August 1797 zu Portoiseau bei Melun, gestorben am 6. Januar 1886 zu Vendôme, hat sich um die wissenschaftliche Ausbildung der Elasticitätslehre hohe Verdienste erworben; gestützt auf Navier u. A., hat er besonders in den Jahren 1837, 1843, 1847, 1853 und 1858 bahnbrechende Abhandlungen über die verwickelteren Fälle der Biegungslehre mit Berücksichtigung der Schubspannungen verfasst und die allgemeine Theorie der Drehungs-Elasticität begründet.

20. **Julius Weisbach**, geboren am 10. August 1806 zu Mittelschmiedeberg im Königreiche Sachsen, gestorben am 24. Februar 1871 zu Freiberg, hat sich durch sorgfältige Versuche über Bewegungswiderstände fester, flüssiger und gasförmiger Körper hervorragende Verdienste, besonders um die technische Hydrodynamik, erworben, hat auch dem Studium und der Anwendung der Mechanik durch die Herausgabe eines umfassenden Werkes „Ingenieur- und Maschinen-Mechanik“ sehr genützt.

21. **Macquorn Rankine**, geboren am 5. Juli 1820 zu Edinburg, gestorben am 24. December 1872 zu Glasgow, gehört zu den Begründern der Mechanischen Wärmetheorie, hat ferner die Lehre vom Gleichgewichte der Erdkörper, sowie die Lehre von der Knickfestigkeit gefördert und dem Ingenieurwesen durch das Buch „A Manual of applied mechanics“ genützt.

22. **B. P. E. Clapeyron**, geboren am 21. Februar 1779 zu Paris, gestorben daselbst am 28. Januar 1864, war ebenfalls ein wesentlicher Förderer der Mechanischen Wärmetheorie und ist den Bauingenieuren namentlich durch seine Weise der Berechnung durchgehender Träger (s. Keck, Elasticitätslehre, S. 78) bekannt.

23. **Carl Culmann**, geboren 1821 in Bergzabern (Rheinpfalz), gestorben am 8. December 1881 in Zürich, begründete, gestützt auf Poncelet und Andere, den besonderen Zweig der Gleichgewichtslehre, den er „Graphische Statik“ nannte, und zeigte deren Anwendung auf fast alle Theile des Bauwesens.

24. **Emil Winkler**, geboren 1835 in Falkenberg bei Torgau, gestorben am 27. August 1888, war einer der bedeutendsten

Förderer der Elasticitätslehre und ihrer Anwendungen auf das Bauingenieurwesen. Er bildete die von de Saint Venant begründete neue Elasticitätslehre weiter aus und schuf unter anderem die Berechnungsarten der Bogenträger, wie sie noch jetzt meist in Gebrauch sind; auch die Lehre vom Erddrucke hat er nicht unwesentlich erweitert.

25. **Franz Grashof,** geboren am 11. Juli 1826 zu Düsseldorf, gestorben am 30. Oktober 1893 zu Karlsruhe, nimmt zu dem Maschinenwesen eine ganz ähnliche Stellung ein wie sein Zeitgenosse Winkler zu dem Bauingenieurwesen, indem er, ebenfalls gestützt auf de Saint Venant, ein gleich vorzügliches Werk über Elasticitätslehre verfasste, dessen Anwendungen sich mehr auf Maschinentheile beziehen. Wie sich Winkler mit Erfolg bemühte, die Mechanik auf alle Theile des Bauingenieurwesens anzuwenden, so bearbeitete Grashof mit dem Werkzeuge der Mechanik alle Gebiete des Maschinenwesens.

26. **Joh. Bauschinger,** geboren am 11. Juni 1834 zu Nürnberg, gestorben am 25. November 1893 zu München, hat sich als Begründer und langjähriger Leiter des mechanisch-technischen Laboratoriums der Technischen Hochschule zu München besonders um die technisch-wissenschaftliche Untersuchung der Baumaterialien hervorragende Verdienste erworben.

27. **Alberto Castigliano,** geboren am 9. November 1847 zu Asti, gestorben am 25. Oktober 1884 zu Mailand, zeigte die Berechnung der Formänderung elastischer Körper, Träger, Fachwerke u. dgl. mittels der Formänderungsarbeit (s. Keck, Elasticitätslehre, S. 253) und benutzte diese Lehren für die Berechnung statisch unbestimmter Träger und Fachwerke.

Alphabetisches Verzeichnis und Bedeutung der in den Formeln vorkommenden Buchstaben unter Hinweis auf die erklärenden Seiten des Buches.

C Centrifugalmoment. 195.
E Elasticitätsmafs. 182.
F Fläche des Fahrstrahls. 85.
F Querschnitt eines Stabes. 181.
G Gleitmafs. 231.
J Trägheitsmoment. 182, 193.
J_1, J_2, J_3 Haupt-Trägheitsmomente. 197.
K Kraft. 51, 151.
M Masse einer Gruppe von Punkten. 164.
N Normalwiderstand. 113.
Q Gewicht eines Körpers. 158.
R Halbmesser einer Kugel. 189.
T Tangentialkraft. 238.
U Kräftefunktion. 88.
V Verdrängung (Deplacement) eines Schiffes. 62, 227.
V Potential. 108, 126.
W Gesammtwiderstand einer Fläche. 160.
W Luftwiderstand. 241.
X Kräftesumme in der x-Richtung. 170.
Y Kräftesumme in der y-Richtung. 170.
Z Kräftesumme in der z-Richtung. 170.

a halbe Schwingungsweite. 55.
a Länge eines Stabes. 182.
a Abstand der Achsen eines Eisenbahnwagens von dessen Mitte. 249.
b Länge der Wasserfüllung einer Röhre. 179.
c Geschwindigkeit, besonders Anfangs-. 2, 171.
e Abstand des Schwerpunktes eines Schiffes vom Schwerpunkte seiner Verdrängung. 228.
f Reibungsziffer. 113.
f Gleichgewichtsbiegung. 61, 247.
g Fallbeschleunigung. 56.
i Trägheitshalbmesser. 183.
k Ziffer der Massenanziehung. 97, 186.
k Gleichgewichtsgeschwindigkeit im widerstehenden Mittel. 78.
k^2 Einheits-Beschleunigung einer Schwingung. 53.
l Hebelarm einer Kraft. 192.
l Schwingungslänge. 227.
l Abstand eines Massenpunktes vom Schwerpunkt eines Körpers. 187.
m Masse eines Punktes. 51.
p Beschleunigung. 2.
p_n Normal- und Centripetal-Beschleunigung. 7.
p_t Tangential-Beschleunigung. 7.
q Ziffer der Sonnen-Anziehung. 97.
r Erdhalbmesser. 56.

r Krümmungshalbmesser einer Kettenlinie im Scheitel. 165.
r Abstand zweier Punkte. 186.
r Abstand eines Punktes von einer Achse. 192.
s Wegeslänge. 1.
s Bogenlänge. 166.
t Zeit. 1.
t Umlaufszeit. 95, 103.
t_1 Dauer einer einfachen Schwingung. 55, 118, 181.
u Geschwindigkeit des Schwerpunktes. 184.
v Geschwindigkeit. 1.
w Geschwindigkeit der scheinbaren (relativen) Bewegung. 37, 185.
x_0, y_0, z_0 Koordinaten des Schwerpunktes. 170.

Δl Gleichgewichts-Verlängerung. 59.
α Neigungswinkel einer Ebene. 158.
α Neigungswinkel gegen die x-Achse. 3.
α_0 Gleichgewichtsgefälle eines Eisenbahnzuges. 241.
β Neigungswinkel gegen die y-Achse. 3.
γ Neigungswinkel gegen die z-Achse. 3.
γ Gewicht der Körpereinheit. 179.
ε Winkelbeschleunigung. 205.
ϑ Drehungswinkel. 227.
μ auf den Umfang bezogene Masse. 236.
ρ Krümmungshalbmesser. 7.
τ Schubspannung. 231.
φ Reibungswinkel. 159.
φ, χ, ψ Winkelgeschwindigkeiten. 30, 212.
ω Winkelgeschwindigkeit. 28.

$\mathfrak{A}$ Arbeit. 176.
$\mathfrak{J}$ Trägheitsmoment der Schwimmfläche eines Schiffes. 228.
$\mathfrak{M}$ Drehungsmoment. 193.

Alphabetisches Verzeichnis der behandelten Gegenstände.

Berichtigung zum ersten Theile:

S. 64, Z. 21 von oben, soll es heissen: $S_1 = S_2$.

Berichtigungen zum zweiten Theile:

S. 42, Z. 18 von oben soll es statt $EJ\frac{dy^2}{dx^2}$ heissen: $EJ\frac{dy^2}{dx}$.

S. 83, Z. 8 von oben sind die Worte „Zugkräfte" und „Druckkräfte" mit einander zu vertauschen.

S. 93: In Gl. 6 fehlt ein Mal der Faktor $\left(1 + \frac{p}{g}\right)$.

S. 109, Z. 14 von unten soll es statt „gleicher Stoffmenge" heissen: „grösserer Stoffmenge".

S. 128, Z. 2 von unten soll es statt M heissen: M_1.

S. 129, Z. 6 von unten soll es statt $M_1 v^2$ heissen: Mv^2.

S. 158 soll es in Fig. 172 statt $p \cdot dy \cdot dz$ heissen: $p \cdot dy \cdot ds$.

S. 168, Z. 16 von unten soll es statt CD heissen: CE.

S. 183, Z. 18 von unten soll es statt „wenn δ die Spannung" heissen: „wenn σ die Spannung".

S. 190, Z. 12 von oben soll es statt „des Punktes E" heissen: „des Punktes E_1".

S. 197, Z. 12 von oben soll es statt $a : \omega^2$ heissen: $g : \omega^2$.

S. 203, Fig. 231 soll es statt f heissen: F.

S. 223, soll es statt „Fig. 348" heissen: „Fig. 248", und darin soll es statt $m \cdot x \cdot w_2$ heissen: $m \cdot x \cdot \omega^2$.

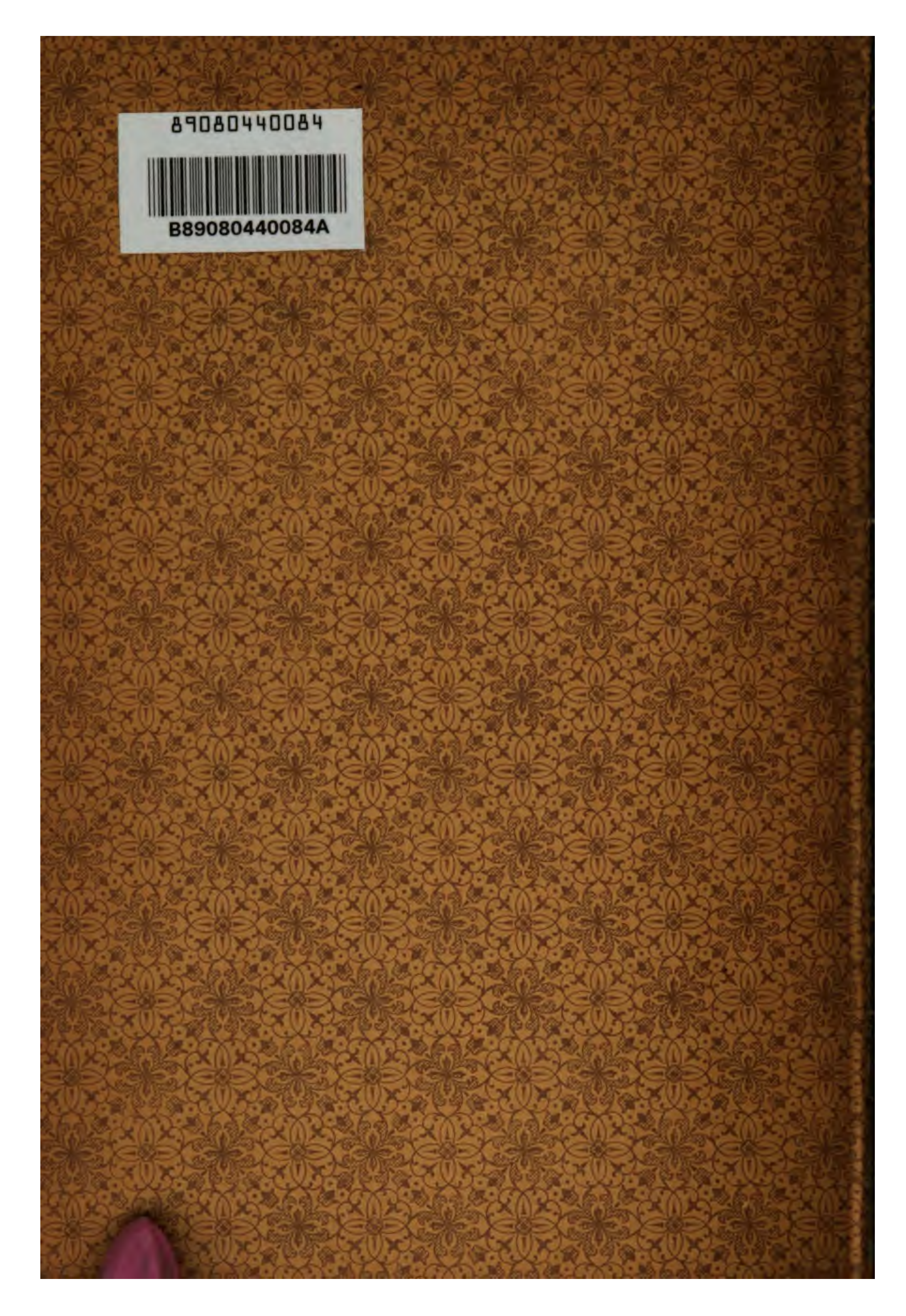
S. 282, Z. 1 von oben soll es statt $\mathfrak{p}_1 = \gamma x_1$ heissen: $\mathfrak{p}_1 = \gamma x_1 + p_0$; ferner ist in Zeile 3 und 7 von oben der Summand $\frac{p_0}{\gamma}$ zu streichen.

S. 295, Z. 4 von oben statt „verwickelbaren" heissen: „verwickelteren"; auch soll es in Z. 7 und 8 von unten heissen: $n = 0{,}017$ bezw. $0{,}013$.

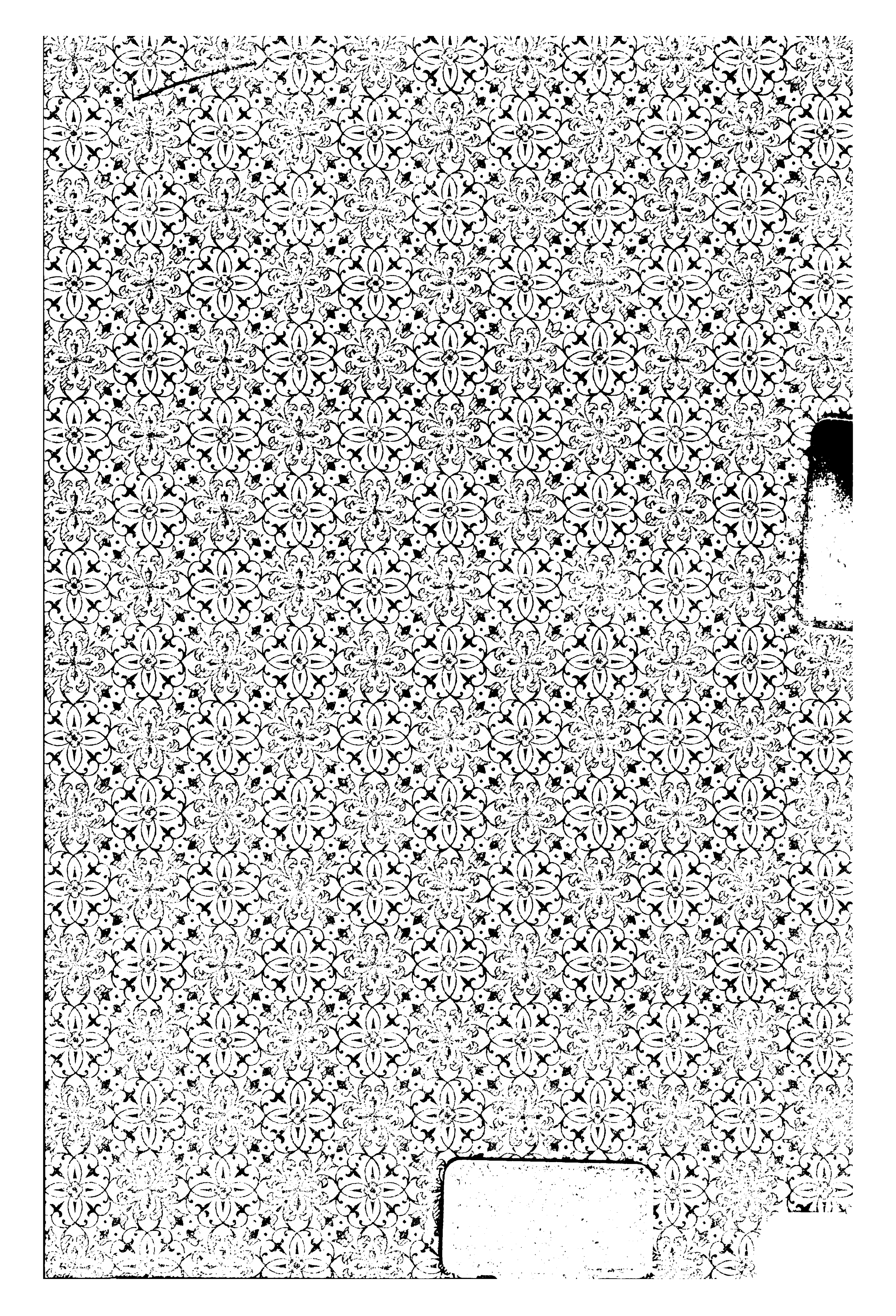
S. 302 soll es in dem Beispiele heissen:

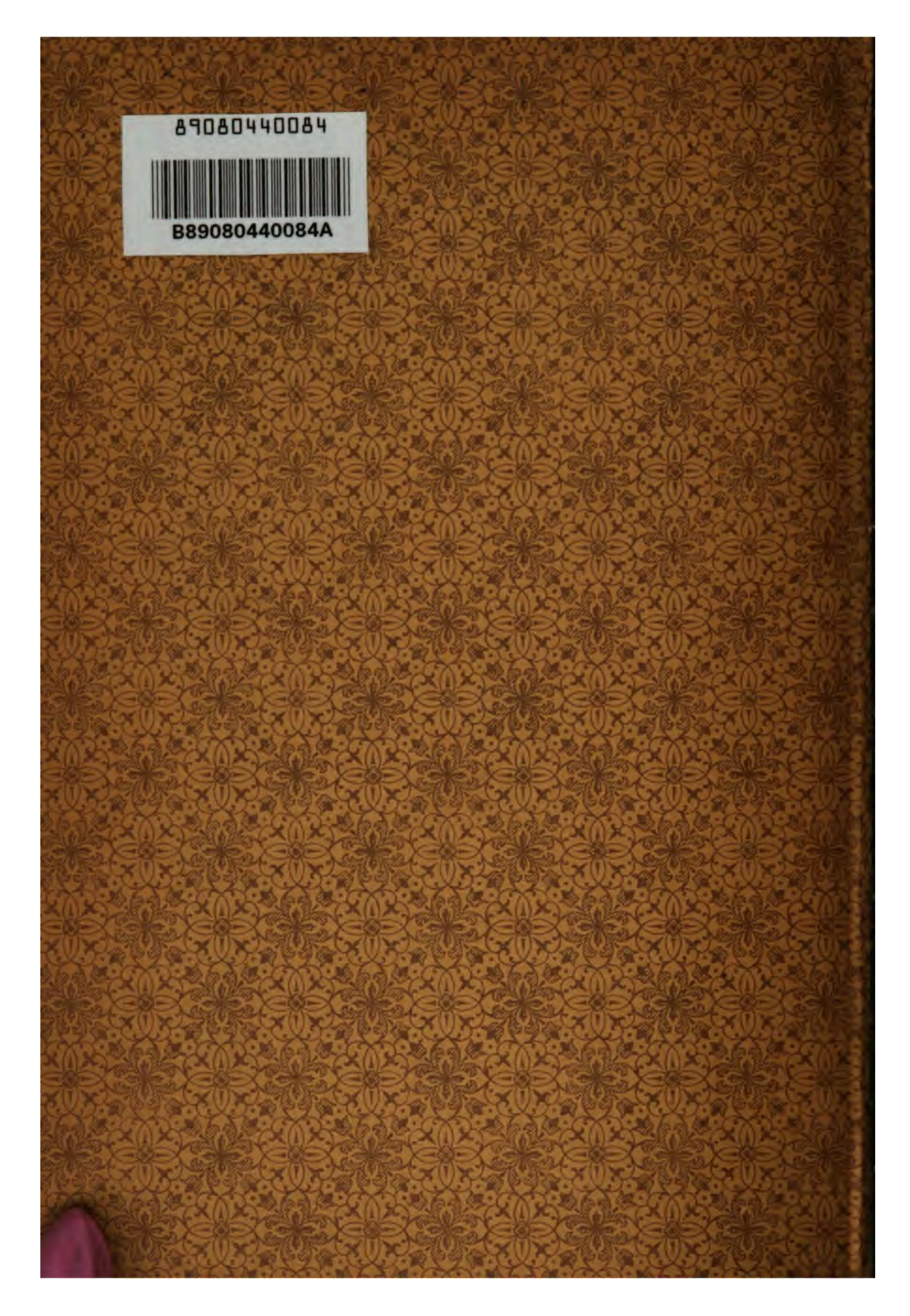
$$t = 1{,}33\,\text{m}; \quad b = 0{,}71\,\text{m}, \quad r = 0{,}665\,\text{m}; \quad \alpha = 0{,}000\,303\,.$$

S. 355, Z. 14 von oben soll es statt „Formel 11" heissen: „Formel 13".



89080440084
B89080440084A




89080440084
B89080440084A

